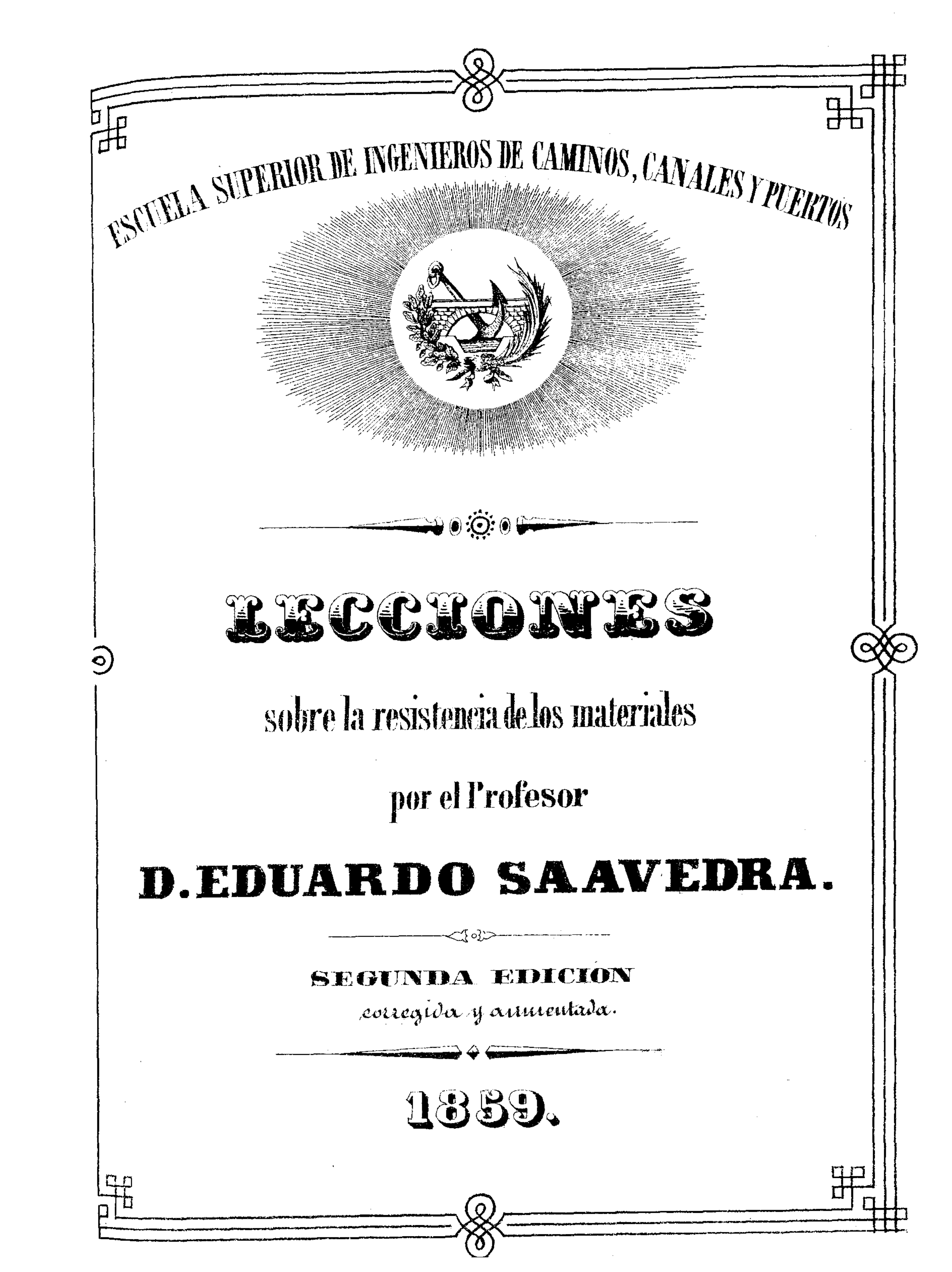


ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

LECCIONES

sobre la resistencia de los materiales

por el Profesor

D. EDUARDO SAAVEDRA.

SEGUNDA EDICIÓN

corregida y aumentada.

1859.

RESISTENCIA

DE LOS

MATERIALES.

Indice.

Paginas

Erratas.

Página	Linea	Dice	Léase
3.	5	le	la
5	3	ninguna	ninguna accion
5	21 y 24.	co	ω
13.	14	en	de
15.	18.	de	da
18.	6 y 11.	vive	viva
24.	penult.	á	ó
29.	14	Dundec	Dundee
52	3	lgr	lgv
52	9	este	esta
52.	20.	u tang	tang
63.	12.	i'	$\frac{1}{2}$ i'
82	19	se	no
89	6	en	en el
98.	4.	tang. tbx	Q tang. tbx
108.	5.	pdp	2 pdp
109.	1	t=0	$t=\frac{1}{2}\pi$
109	2	$t=\frac{1}{2}\pi$	t=0
127.	1	maximo	mínimo.
151.	7	CB	CA

Figuras.

En la 4ª falta una t.
En la 5ª, la d debe ser d' y falta una d entre b y t.
En la 36 falta una o entre M y N.

Regalada a la Escuela por el Autor

Resistencia de los materiales.

Seccion 1ª

De las fuerzas elásticas.

1. El estudio de la resistencia de los materiales tiene por objeto averiguar la magnitud é importancia de las deformaciones que han de sufrir los cuerpos sólidos cuando se destruyen por su intermedio las fuerzas que actúan en sus caras ó en su interior; deduciendo de este conocimiento las condiciones necesarias para que estas deformaciones no pasen de ciertos límites. Para hacer este estudio es menester examinar la accion mútua y sucesiva de las moléculas de que se compone el cuerpo.

2. Sean O, o (fig.ª 1.ª) las posiciones de dos moléculas inmediatas cualesquiera M, m de un cuerpo, solicitadas tan solo por sus atracciones y repulsiones mútuas, que se equilibran á la distancia Oo. Si para mayor sencillez se supone fija la molécula M en O, y se aplica á la m una fuerza dirigida en el sentido de la recta Oc; esta última tomará diversas posiciones d, d', d'' &c.ª si la fuerza es de traccion ó tiende á separarlas; ó c, c' c'' &c.ª, si es de presion ó compresion ó tiende á aproximarlas, de tal modo que en cualquiera de las primeras posiciones se verifique que el esceso de la atraccion de la molécula M á la distancia Od sobre la repulsion á la misma distancia, equivalga exactamente á la fuerza aplicada á la m; y del mismo modo se verifique en cualquiera de las últimas, que el esceso de la repulsion de la molécula M á la distancia Oc sobre la atraccion á la misma distancia sea igual á la fuerza que se ha aplicado á la molécula m.

3. Es evidente que mientras no haya cambiado en nada la constitucion física de un cuerpo, en cuanto cese de actuar la fuerza de traccion ó compresion aplicada á la molécula m, volverá esta á la posicion o en que se equilibran las fuerzas atractivas y repulsivas naturales, y la fuerza con que tiende á volver á esta posicion, igual y contraria á la que la retenia en su desviacion anterior, se llama fuerza elástica. Levantando en cada punto d, d' &c.ª que puede ocupar la molécula m una perpendicular dt, d't' &c.ª equivalente á la intensidad de la fuerza elástica, (que se tomará en sentido contrario de cp, c'p', &c.ª) se formará una curva contínua t''o p'', que representará la relacion que hay entre cada dilatacion ó contraccion de la distancia Oo y la fuerza necesaria para mantener en ella á la molécula m. La curva pasará precisamente por el punto o que corresponde al equilibrio de las moléculas libres.

4. La forma de esta curva no puede ser conocida en toda su estension sino por medio de observaciones particulares en cada clase de materiales; pero el hecho comun á todos es que para las aplicaciones no se ha de considerar en ellos sino la accion de fuerzas que produzca en las distancias de las moléculas, variaciones muy

pequeñas relativamente á sus longitudes primitivas. En límites tan reducidos, la curva, cualquiera que sea, se podrá considerar confundida con su tangente en o y reemplazada por ella. Entonces, llamando f á la intensidad de cualquiera de las fuerzas, td por ejemplo, x á la dilatacion ó contraccion que le corresponde, od y e á la tangente del ángulo tod, se tendrá la relacion

$$f = ex,$$

cualquiera que sea la direccion de la fuerza y el sentido de la variacion. La constante e habria de determinarse esperimentalmente para cada clase de material.

5. Suponiendo ahora un conjunto de moléculas A, B, C (fig.ª 2.ª) contenidas en un plano fijo, y otras a, b, c, correspondiéndose con ellas en un plano inmediato, cada una, b por egemplo, ejercerá atracciones y repulsiones sobre todas las inmediatas a, A, B, C, c; y si en cada una de las del segundo plano se aplica una fuerza f, al trasladarse estas á las posiciones a', b', c', en que equilibran á las fuerzas esteriores, la molécula b, no solo está atraida por la B que se corres-

ponde con ella, sino tambien por las A y C, cuyas distancias Ab, Cb se han aumentado; no recibiendo ninguna accion de las a y b por que hasta ahora sus distancias son invariables. Las fuerzas elásticas inclinadas en sentido Ab', Cb' se pueden descomponer en direcciones paralelas á Bb y á AC: las primeras componentes que serán las únicas que influyan en la variacion de distancia de los dos planos en virtud de la pequeñez de los aumentos de distancia, siguen siendo proporcionales á bb', y como lo mismo se verifica para cada molécula a, c, &ª se podrá establecer la ecuacion siguiente

$$F_1 = E_1 x,$$

siendo F_1 la suma de las fuerzas f iguales aplicadas á todas las moléculas, y E_1 la nueva constante que indica la proporcionalidad para el conjunto de un cierto número de ellas. Fijando para la medida de E_1 las que contenga la unidad de superficie, para otra superficie ω, este número de moléculas será proporcional al de unidades que contenga, y por consiguiente la suma F de las fuerzas aplicadas será proporcional á ω, de modo que se

tendrá entonces

$$F = E_1 \ldots \omega x,$$

por ser $F = E_1 \omega$

6. Cuando se considere un cuerpo prismático (figura 3.ª), como compuesto de moléculas situadas en planos paralélos y sumamente próximos a, b, c, d, &c.ª, se observará que todas estas secciónes materiales estarán en equilibrio siempre que diste lo mismo cada una de la que le precede que de la que le sigue, y que por consiguiente todas se equilibrarán en sus diferentes posiciónes mutuamente menos las estremas a y g, que necesitan equilibrarse por fuerzas esteriores aplicadas á sus moléculas. Si para mayor sencillez se supone la primera seccion a, fija en el plano AB, bastará para el equilibrio que se hayan aplicado á la otra g una série de fuerzas iguales f, cuya suma F satisfaga á la condicion

$$F = E_1 \omega x,$$

siendo x la variacion de distancia en dos secciónes cualesquiera.

Mas como esta variacion no se puede observar, es menester reemplazarla por la que

esperimenta la longitud total del prisma, que será igual á mx si es m el número de secciones materiales de que consta. Si es l esta variacion de longitud, se tendrá

$$l = mx$$

y si se llama L la longitud primitiva ó del prisma y a á la distancia de equilibrio de sus secciónes inmediatas, se tendrá tambien

$$L = ma,$$

de cuyas dos igualdades se deduce

$$x = \frac{l}{L} a,$$

y la ecuacion del equilibrio se transforma en

$$F = E_1 a \omega \frac{l}{L},$$

y haciendo por fin

$$E = E_1 a, \quad \frac{l}{L} = i,$$

resulta

$$F = E \omega i, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

espresion en la cual E es una cantidad constante independiente de la longitud del prisma ó del número de secciónes en que se divida, é i la variacion de la unidad de longitud del prisma, ó sea la dilatacion ó contraccion relativa.

7. La cantidad E, constante para cada clase

de material, espresa un cierto número finito de unidades de fuerza, por que se compone de un número sumamente grande de valores de e (5) multiplicados por una longitud muy pequeña a (6), y el número e espresa una relacion finita entre fuerzas y distancias infinitamente pequeñas (4). Esta cantidad E se llama el coeficiente de elasticidad longitudinal de la materia á que corresponde, pues sirve de medida á la influencia de las fuerzas esteriores en la deformacion de los cuerpos en el sentido de la longitud. Este coeficiente suele definirse diciendo que es la fuerza necesaria para aumentar ó disminuir un prisma de la unidad de área de seccion transversal en una longitud igual á la suya, por que haciendo en la fórmula (1) $l = L$, $w = 1$, resulta $F = E$. Pero ningun cuerpo puede conservar sus propiedades físicas con alteraciones tan grandes, y ademas su magnitud sale fuera de las hipótesis (2) en que unicamente se puede admitir la fórmula como exacta ó aproximada.

8. Las componentes de las fuerzas elásticas paralelas al plano A C (fig.ª 2.ª) producen una

variacion en las distancias BA, BC. Si el punto b ha pasado á b', aumentando las distancias, la fuerza elástica dirigida de C á b' es atractiva, y por consiguiente su proyeccion en B C tiende á aproximar las moléculas B y C lo cual se verificará siempre que, como ordinariamente acontece, no haya fuerzas de traccion laterales. Si por el contrario, el punto b se aproximase á B, las fuerzas elásticas oblicuas serian repulsivas y producirian el aumento de distancia de A y C á B. Como este fenómeno se verificará en todas las secciones de un prisma, se deduce que toda dilatacion elástica longitudinal vá acompañada de contraccion lateral, y que toda contraccion elástica longitudinal lleva consigo una dilatacion trasversal. Estas variaciones trasversales tienen que ser menores que las longitudinales á que acompañan, por lo que no es necesario hacer un estudio detenido de ellas, y nos servirán solo para conocer y esplicar la naturaleza de los fenómenos físicos que tienen lugar en los materiales sometidos á fuerzas estrañas. Su magnitud depende de lo que varía la elasticidad en

cada direccion al rededor de un punto en el interior de un cuerpo.

9. Como todas las fuerzas iguales f (fig.ª 3.ª) se pueden reemplazar con una F igual á su suma y aplicada al centro de gravedad de la seccion, se puede admitir que cuando una fuerza F obra en el centro de gravedad de la seccion estrema de un prisma, produce los mismos efectos que si estuviera repartida uniformemente en su superficie, con tal que la longitud del prisma sea bastante grande comparada con su seccion trasversal para que se anulen las irregularidades que se produzcan en las primeras secciones. Entonces se podrán enunciar las siguientes leyes que sigue la accion de las fuerzas aplicadas al centro de gravedad de la base de los prismas materiales; siempre que las dilataciones ó contracciones sean muy pequeñas.

1.º En prismas de la misma materia y de igual seccion, las variaciones de longitud causadas por fuerzas iguales, son como las longitudes primitivas.

2.º En prismas de la misma materia, las fuerzas necesarias para producir iguales variaciones relativas, son proporcionales á las áreas de sus bases ó secciones.

3.º En prismas iguales, las fuerzas iguales y de signo contrario, producen variaciones iguales y de signo contrario.

4.º Toda variacion longitudinal está acompañada de otra variacion trasversal menor y de signo contrario.

5.º Estas proporcionalidades se determinan en cada clase de materia por el coeficiente de elasticidad longitudinal.

10. La recta Oo (fig.ª 4.ª) formada por el mismo sistema de dos moléculas M, m, ofrece tambien resistencia á tomar una posicion Od inclinada respecto de la primitiva, lo que equivale á haberse desviado la molécula m en sentido perpendicular á Oo, quedando la M fija en O. Para mantenerse dicha molécula en cada posicion nueva d, d′ d″, &.ª se necesitará aplicarle una fuerza variable dirigida de o á y, y cuya intensidad, tomada linealmente en sentido paralelo á oh se puede formar la curva que representa la ley de su variacion. Lo mismo que antes, mientras estas variaciones sean pe-

queñas, la curva se confundirá con su tangente en o, y llamando h á la intensidad de la fuerza dt, y á la desviacion od, y g á la tangente trigonométrica del ángulo tod, se tendrá la relacion

$$h = g\,y.$$

Estendiendo esta consideracion á todas las moléculas contenidas en un plano, y que ocupen la unidad de superficie, se tendrá por las mismas consideraciones que antes (5)

$$H_1 = G_1\,y,$$

siendo H la resultante de todas las fuerzas iguales á h aplicadas á cada molécula, é y la desviacion media en todas las moléculas, que es la del centro de gravedad de la seccion movible. En otra seccion de superficie ω, haciendo $H = H_1\,\omega$, se tendrá

$$H = G_1\,\omega\,y,$$

y cuando se considere un prisma de cierta longitud L, á cuyas secciones se pueda considerar aplicada una misma fuerza H, llamando a á la distancia primitiva Oo de las dos secciones, m al numero de secciones que componen el prisma y l' á la desviacion relativa entre la pri-

mera y la última seccion, se tendrá:

$$L = m\,a, \quad l = m\,y, \quad y \quad H = G_1\,a\,\omega\,\frac{l'}{L}.$$

Haciendo $G_1\,a = G$, $\frac{l'}{L} = k$,

siendo k la desviacion lateral relativa, se tiene la fórmula

$$H = G\,\omega\,k. \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(2)$$

11. La cantidad constante G, que depende solo de la naturaleza de la materia que compone las moléculas, se llama el coeficiente de elasticidad trasversal. Acerca de esta fórmula se pueden hacer las mismas observaciones y deducir las mismas consecuencias que de la fórmula (1) relativa á la elasticidad longitudinal.

12. Los valores de los coeficientes de elasticidad varian mucho segun el modo de preparar y trabajar los materiales y su distinta procedencia; pero los términos medios mas generales son los siguientes, espresados en kilógramos por milímetro cuadrado.

Materiales.	Coeficiente de elasticidad.	
	Longitudinal. E.	Trasversal. G.
Maderas (término medio)	1000	400.
Acacia	1.200	"
Pino	1.150	433.
Encina	890.	400.
Olmo	1160.	"
Haya	980.	"
Hierro forjado	20.000.	6.666.
" pasado por la hilera	18.000.	"
" laminado ó palastro	16.000.	6.000.
" cilindrado en forma de T	11.000.	
" colado de grano fino	12.000.	2.000.
Fundición gris de buena calidad	8.000.	"
Acero fundido, fino, templado	30.000.	10.000.
" recocido	20.000.	6.000.
" templado ordinario	11.000.	"
Cobre forjado	10.000.	4.366.
Bronce fundido	6.000.	1.666.
Plomo fundido	500.	"
Plomo laminado ó estirado	700.	"

La gran rigidez de la piedra ha impedido averiguar los coeficientes de elasticidad.

Ejemplos.

Se pregunta qué aumento de longitud esperimentará una barra cuadrada de hierro dulce de dos centímetros de lado en la seccion trasversal cuadrada, y de 4,50 metros de longitud bajo la accion de una fuerza de 26 toneladas dirigida en sentido de la longitud. La fórmula (1) dá

$$26000 = 20000 \times 400 \times i,$$

de donde se deduce

$$i = 0,00325 \quad y \quad l = 0,00325 \times 4^m,5 = 0^m,015.$$

Se pregunta la contraccion que habrá en un poste de madera de 25 centímetros de lado en su seccion cuadrada y de 3 metros de longitud, bajo la carga de 30 toneladas. La misma ecuacion da

$$30000 = 1000 \times 62500 \times i,$$

de donde se deduce

$$i = 0,00048 \text{ —— } l = 0,00048 \times 3^m = 0^m,00144.$$

Se quiere saber la desviacion lateral que tomarán las secciones estremas de un cilindro de hierro fundido de un decímetro de radio

y de 6 metros de longitud, sujeto á una accion trasversal de 600 kilógramos. La fórmula (2) dá

$$600 = 2000 \times 3,14 \times 10000 \times k;$$

de donde resulta

$$k = 0,0000095 \ldots \text{ y } l = 0,0000095 \times 6^{m} = 0^{m},000057.$$

11. Las fuerzas espresadas por las fórmulas (1) y (2) son las necesarias para mantener en equilibrio á las moléculas de un sólido con cierto aumento ó disminucion de distancia; pero cuando estas fuerzas se apliquen desde el principio á un prisma que se encuentre en su estado natural, imprimirá á sus estremidades cierta velocidad que les hará llegar á posiciones mas distantes de la primitiva que la calculada por las fórmulas citadas, determinando un movimiento de oscilacion.

Sea AB (fig.ª 5.ª) el eje de un prisma cuyo estremo A esté fijo, y que sufra por el otro B una dilatacion variable Bb. Siendo

$$TBC = \text{ang. tang. } (E\omega),$$

la fuerza elástica desenvuelta en cada posicion del punto b está representada por bt, y el trabajo de esta fuerza en un instante infinitamente

te pequeño será el producto $bt \times bb'$, siendo bb' el elemento de camino recorrido por el punto miéntras se le puede atribuir á la fuerza elástica un valor constante. Segun esto, el trabajo elemental de la fuerza elástica equivale al área del trapecio infinitamente estrecho $bb't't$, y todo el que desarrolla desde que empieza la dilatacion en B hasta que llega el estremo á la posicion b equivale al área del triángulo Bbt, cuya espresion es

$$\frac{1}{2} Bb \times bt = \frac{1}{2} Bb^2 \times \text{tang. } TBC = \frac{1}{2} E\omega x^2;$$

siendo x la dilatacion variable absoluta.

Si otra fuerza de magnitud proporcional á Bf, dirigida en sentido de la longitud AB, está aplicada al punto B, el trabajo que le corresponda al llegar este estremo á b será el producto $Bf \times Bb$, ó sea el área del rectángulo $Bbdf$. La velocidad será nula cuando los trabajos de todas las fuerzas se hayan anulado, que será en una posicion como la c, en que el área del rectángulo $Bcf'f$ sea igual á la del triángulo Bcd', para lo que es preciso que cf' sea mitad de cd'. Esto se verificará cuando Bc sea el doble de Bm, posicion en la cual la fuerza

elástica me es igual á la fuerza dada.

15. La fuerza Bf puede ser producida por la presion constante de un cuerpo que haya venido á chocar con la estremidad del prisma con cierta velocidad. En este caso, la fuerza viva inicial se puede reemplazar por el trabajo que tendria necesidad de desenvolver la fuerza dada para producirla, partiendo del reposo. Si es Bh el camino necesario para que esto suceda, el rectángulo $Bhpf$ representará el efecto de que es capaz la fuerza viva inicial; y el término de la escursion del punto B será un punto C en el cual se verifique que

$$hCp'p = BCT.$$

16. La dilatacion ó contraccion que esperimenta una barra prismática por su propio peso, es la mitad de la que le haria tomar este mismo peso acumulado en su parte inferior ó superior. Sea AB una barra suspendida del punto A: la dilatacion que esperimenta el elemento bb' será $i \times bb'$, ó por la fórmula (s)

$$\frac{P \times bb'}{E\omega}$$

siendo P el peso de la parte que hay debajo de este elemento.

Trazando una horizontal AC, cuya longitud esté con la AB en la relacion que el peso p por unidad de longitud de la barra tiene con el producto $E\omega$, y uniendo el punto C con el B, cualquier ordenada bc de la recta BC representa la espresion $\frac{P}{E\omega}$ correspondiente al punto b, porque se tiene

$$bc : bB :: AC : AB :: p : E\omega,$$

de donde se deduce

$$bc = \frac{p \times Bb}{E\omega}$$

De este modo, la dilatacion del elemento bb' está representada por el área del trapecio $bb'cc'$, y la suma de todas estas dilataciones parciales, que es la dilatacion total, será el área del triángulo BAC, mitad de la del rectángulo $BACB'$ que sería lo que ocasionase el peso de AB acumulado en el estremo B.

Leccion 2.ª

De la resistencia permanente.

57. Las propiedades físicas de los sólidos no se conservan las mismas cualquiera que sea la variacion de distancia y posicion relativa de sus moléculas, sino que llega un punto en que se alteran de tal modo sus propiedades elásticas, que las moléculas abandonadas á sí mismas no vuelven exâctamente á su posicion primitiva, ni recobra el sólido que componen su primera forma de equilibrio. La dilatacion, contraccion, ó desviacion lateral mayores que puede sufrir un material quedando capaz de recobrar exâctamente su estado primitivo se llaman los límites de la elasticidad, y se ha observado que son bastante pequeños para poder aplicar á los sólidos, en la estension que comprenden, cuanto se ha espuesto en la leccion anterior.

18. Un solido, cuyas moléculas hayan pasado de las posiciones que señalan los límites de la elasticidad, queda con cierta deformacion permanente que suele servir de medida á la pérdida de elasticidad que ha esperimentado; y las fuerzas que despues de esto se le apliquen producen alteraciones mayores que hubieran producido cuando se encontraba en su estado natural primitivo, de modo que la misma fuerza ocasiona entonces con el tiempo alteraciones crecientes cada vez, hasta que llega á romperse el sólido por la estraordinaria magnitud que alcanzan.

19. La rotura de un cuerpo tiene lugar cuando la distancia entre algunas de sus moléculas ha aumentado tanto (cualquiera que sea la causa) respecto de la de equilibrio, que la accion atractiva que las mantiene unidas se hace despreciable comparada con las demas fuerzas esteriores y en especial con la gravedad. Cuando un cuerpo se comprime, la rotura proviene del aumento de distancias en el sentido trasversal (8), lo cual esplica por qué al aplastarse un sólido se raja longitudinalmente ó

se hincha por los lados. La rotura se puede producir por la accion inmediata de una fuerza suficientemente grande, ó por la accion lenta y sucesiva de una fuerza que haga pasar á las moléculas de su límite de elasticidad. La primera es la que se llama la resistencia instantánea ó á la rotura.

20. Importa en las construcciones, no solo que no se rompan los materiales al tiempo de colocarse y cargarse, sino que resistan durante el largo tiempo que ha de estar en pié la obra. Para esto es preciso que las fuerzas que obren en ellos sean inferiores á las que en cada caso hagan pasar á las moléculas del límite de la elasticidad. Llamando i' y k' respectivamente las desviaciones relativas longitudinal y trasversal que corresponden á estos límites, las fuerzas que son necesarias para mantener al cuerpo con ellas son (6, 10)

$$E\omega i' \qquad y \qquad G\omega k';$$

pero las que se necesitan para hacer llegar á las moléculas á estas posiciones partiendo de las de equilibrio, en la suposicion de que em-

pieçen á obrar sin velocidad inicial, que es el caso mas favorable, son (14)

$Q = \frac{1}{2} E w i'$ y $P = \frac{1}{2} G w k'$,

cuyas espresiónes son los verdaderos límites de las fuerzas que se pueden yércer con seguridad y de una manera permanente sobre los materiáles, por que la hipótesis en que se han establecido es la que se realiza en las construcciónes que se someten á cargas en reposo ó sin choque.

21. La fuerza ó carga que puede resistir un sólido es proporciónal al área de su seccion transversal, y á la que corresponde á la unidad superficiál se llama la resistencia permanente, cuyo estudio es el mas importante. Haciéndo

$\frac{1}{2} E i' = R$ y $\frac{1}{2} G k = T$,

las constantes R y T representan las resistencias permanentes en cada sentido, y las fórmulas últimas se reducen á

$Q = R w$ .... (3) y $P = T w$, ... (4)

con los cuales se pueden averiguar la carga que puede soportar un sólido, ó la cantidad de material que se necesita para resistir una

fuerza dada.

22. Los valores de R y T se calculan directamente cuando se conocen las constantes E, G, i', k' cómo sucede respecto del hierro y de algunas maderas; pero se carece para muchos materiáles de estos datos, y entonces es preciso acudir á la observacion de la carga que sufren los materiáles análogos en obras construidas mucho tiempo atrás y que han ofrecido en ellas completa seguridad. Aun en muchos casos no es posible haser esta observacion, y entonces, conocidas la carga permanente y la de rotura para un material análogo, se averigua por un esperimento la carga de rotura de que se trata, y se toma para la carga permanente una fraccion igual á la que marca la relacion antes dicha. Llamando R_1 á la carga de rotura, y m á la fraccion de ella que se juzga deber tomar, se tiene $R = m R_1$

23. Cada material no resiste lo mismo en todos sentidos, é importa conocer qué influenciá puede tener su posicion respecto delas fuerzas para colocarlo siempre en la mas favorable. Cuando el cuerpo es homogéneo ó

compacto, es indiferente el modo con que se coloque, pero cuando es foliáceo ó estratificado, conviene que se comprima perpendicularmente á las capas, y cuando es fibroso que se solicite paralelamente á las fibras

Resistencia de las piedras, ladrillos y morteros.

24. Estos materiales presentan una textura homogénea, ó en capas paralelas. El valor de la resistencia permanente no puede determinarse sino tomando una fraccion de la instantánea, por la gran rigidez que poseen por lo comun. Su mayor resistencia es á la compresion, á cuya fuerza deben someterse únicamente en las obras.

25. Piedras. Los experimentos de varios ingenieros han conducido á los resultados siguientes:

1.º Las propiedades físicas de las piedras no guardan relacion alguna con su resistencia.

2.º Las piedras mas resistentes son las mas

homogéneas; por lo que deben preferirse en una misma cantera las del centro.

3.º La resistencia de los prismas de una misma base varía con la altura, teniendo su máximo en la forma cúbica.

4.º El fenómeno de la rotura se verifica de dos modos: si las piedras son duras, se dividen en agujas verticales, y estas se reducen en seguida á polvo; si son blandas, se dividen en seis pirámides cuyo vértice comun está en el centro del sólido. Este último modo de rotura es el mas frecuente en las esferas y cilindros.

5.º Si la resistencia del cubo representa la unidad, la del cilindro inscrito será 0,80 en direccion del eje, 0,32 en sentido perpendicular á él, y la de la esfera inscrita 0,26.

26. Cuanto mayor es el número de hiladas en que se ha dividido un pilar, tanto menor es la resistencia; aunque no se puede apreciar con exactitud la disminucion que proviene de esta causa por estar ligada con la que tiene lugar por efecto del mal asiento, labra imperfecta, &c.ª Los experimentos de Vicat hacen creer que dicha disminucion es pequeña; pero los de

Rondelet, hechos en las circunstancias ordinarias de las obras, indican que cuando el número de hiladas es mayor de cuatro, la resistencia es casi constante é igual á la mitad de la de un cubo monolito.

27. La resistencia permanente de las piedras tiene gran variedad; pero los términos medios mas generales son,

para las piedras silíceas ... 0,5 kilog. por milím. cuadrado.

para las calizas duras ..... 0,3 id. id.

para las calizas blandas ... 0,1 id. id.

y en ningun caso excede de 2 kil.ˢ por mil. cuad.ᵒ

Los esperimentos hechos hasta el dia dan los resultados siguientes:

Resistencia de las piedras á la rotura por compresion.

Autores(*)	Clase de la piedra.	Peso específico.	Carga de rotura kilog.ˢ por centímetro cuad.
	Piedras silíceas.		
G.	Pórfido	2,87.	2472.
R.	Basalto	2,95.	1995.
Rn.	Granito de Aberdeen	2,62.	775.
R.	de Bretaña	2,74.	654.
R.	de los Vosges	2,64.	423.
R.	Piedra arcillosa fétida	2,66.	681.
R.	Yd. id. textura fina	2,56.	422
R.	Lava del Vesubio	2,60	592.
R.	Id de Roma	1,97.	228.
R.	Asperon rojizo	2,52.	813.
Rn.	Arenisca de Dandee	2,52.	471.
G.R.	Arenisca blanda	2,49.	4.
	Piedras calizas.		
R.	Mármol negro de Flandes	2,72	799.
Rn.	Mármol estatuario de Italia	2,73	687.
Rn.	Mármol rojo de Devonshire	"	527.
R.	Caliza dura de Bagneux de grano fino	2,44	444.
Mf.	Caliza grifítica de Metz (hidráulica)	2,60	300.
G.	Caliza dura de Givry	2,36	308.
G.	id. blanda de id.	2,07.	115.
Mf.	Caliza oolítica de Jaumont	2,20	120.
R.	Caliza compacta de Conflans	2,07.	89.
R.	Caliza blanda porosa	1,56	23.
V.	Caliza granosa	"	94.
V.	Caliza oolítica	"	106.
V.	caliza litográfica	"	295.
M.	caliza de la Aldehuela (provª de Madrid)	2,75	469.
M.	caliza de Patones (id)	2,50	310.
M.	Caliza de la Atalaya (id.)	2,14.	218.
R.	Yeso de Montmartre	1,92.	72.

(*) G. Gauthey; R. Rondelet; Rn. Rennie; M. Morer; Mf. Montfort; V. Vicat.

28. La relacion de R_1 á R varía en algunas circunstancias, aunque la mas comunmente admitida es $\frac{1}{10}$ del modo siguiente:

Carga permanente de las piedras.

Clase de obra.	Valores de m.
Sillería de grandes dimensiones, perfectamente labrada y asentada	0,30.
Sillería ordinaria siendo la altura menor que doce veces el diámetro mas pequeño de la base.	0,10.
Sillería ordinaria, siendo la relacion de la altura á la base mayor que 12	0,05.
Mampostería	0,05.

29. La resistencia á la estension se verifica en pocos casos, por lo que se poseen tambien pocos datos acerca de ella. Los siguientes dan una idea de su intensidad.

Resistencia de las piedras á la estension

Autores.	Clase de piedra	Carga de rotura. Kilog. p.r cent. cuad.
Coulomb.	Piedra blanca de grano fino	14.
Tredgold.	Caliza de Portland	60.
Rondelet.	Basalto de Auvernia	77.
Vicat.	Piedra litográfica	31.
id.	Caliza granugienta	23.
id.	Caliza oolítica	14.

La relacion m se suele tomar tambien de 0,10.

30. Ladrillos. La rotura de los ladrillos se verifica lo mismo que la de las piedras, siendo tambien m = 0,10 si son de buena calidad; pero cuando son muy blandos, ó se hace la obra con poco cuidado, conviene hacer m = 0,07.

Resistencia de los ladrillos á la compresion

Autores.	Clase de ladrillo.	Carga de rotura Kilog. p.r centi.cu.
G.	Ladrillo duro	149.
Rn.	Ladrillo de Hammersmith	71.
Rn.	El mismo muy cocido	102.
Rn.	Ladrillo amarillento	40.
M.	Ladrillo de sillos (prov. de Madrid)	98.
V.	Adobe	33.

Resistencia del ladrillo á la estension.

Autores.	Clase de ladrillo.	Carga de rotura Kilog.s p.r cent.o cuad.s
Coulomb.	Ladrillo de Provenza, bien cocido	3[illegible]
Tredgold.	Ladrillo ordinario bien cocido	19.
"	Ladrillo mal cocido	8.

31. Morteros. En los morteros conviene tomar m bastante pequeño, atendiendo al sin número de causas que alteran sus cualidades, y á que no las adquieren por completo hasta

mucho tiempo despues de empleados en la obra.

La resistencia á la compresion es muy pequeña cuando se han endurecido; recien amasados es casi nula.

Resistencia de los morteros á la compresion.

Autores.	Clase de mortero.	Carga de rotura. Kil. p.r cent.o c.do
	Mortero ordinario.	
R.	Mortero de cal y arena	35.
V.	Yd. de cal y arena de 14 años	19.
	Morteros hidráulicos.	
R.	Puzolana de polvo de ladrillo	48.
R.	Puzolana de Italia	37.
R.	Enlucido de unas ruinas romanas	76.
[illegible]	Yd. de las ruinas de la Bastilla	55.
V.	Mortero de cal hidráulica ordinaria	74.
V.	Yd. id. eminentemente hidráulica	144.
	Yesos.	
R.	Yeso amasado con agua	50.
R.	Yeso amasado con lechada	73.
V.	Yeso espeso	90.
V.	Yeso claro	42.

32. Respecto de la resistencia á la estension, ha de distinguirse la cohesion del mortero y su adherencia con los materiales que une. Esta última por lo comun es mayor, de modo que un pilar se rompe mas bién por medio de la masa de mortero ó del material que lo compone, que por la union de uno y otro. En el yeso la adherencia disminuye con el tiempo, pero en los morteros de cal aumenta.

Resistencia del mortero á la extension.

Autores.	Clase de mortero.	Carga de rotura Kil. p.r cent.o c.do
V.	Cal grasa y arena, de 14 años	4.
V.	Yd. mal hecho	0,7.
V.	Cal hidráulica y arena	9.
V.	Cal muy hidráulica	15.
Mallet.	Cemento de Pouilly	9.
R.	Yeso comun	5.
V.	Yeso fuerte	12.
V.	Yeso claro	6.

Resistencia de las maderas.

33. La madera se compone de fibras paralelas dispuestas en capas concéntricas al rededor de la médula del árbol. Esta disposicion manifiesta que la madera tiene tres ejes de elasticidad, uno paralelo á las fibras, ó sea el eje de figura del árbol, otro en sentido del radio, y el tercero paralelo á las capas, ó sea tangente á los círculos que forman. De los esperimentos de Rondelet, Hodgkinson, Chevandier y Wertheim, &c.a se ha deducido lo siguiente:

1.o La elasticidad no guarda relacion con la resistencia á la rotura.

2.o La desecacion aumenta considerablemente la elasticidad de la madera.

3.o En la elasticidad influyen la edad, esposicion, suelo y parte del árbol de donde se ha sacado el ejemplar de madera.

4.o La época de la corta, el espesor de las capas, y otras circunstancias análogas no influyen en la elasticidad.

5.o La elasticidad en sentido del eje, del radio y de la tangente están en la relacion de

1: 0,165: 0,091; y la resistencia á la rotura en la relacion de 1: 0,163: 0,159.

34. El límite de las cargas permanentes se ha de deducir de diferente modo segun la manera de resistir de la madera. Cuando es á la extension, se halla componiendo los valores de E é i' que se conocen para varias clases de madera, y cuyo resultado, referido al milímetro y kilógramo, se halla en la tabla siguiente:

Resistencia de las maderas á la extension.

Clase de madera.	Carga permanente.
Acacia	1,587.
Pino.	0,798.
Encina.	0,968.
Olmo.	0,921.
Haya	0,815.

Los valores medios R en toda clase de maderas, especialmente pino y encina, se pueden tomar:

En obras ligeras ó con materiales de eleccion. ——— R = 0,80 kil. por mil. cuad.°

En obras ordinarias ——— R = 0,60 kil. por mil. cuad.°

En obras de gran solidez —— R = 0,40 id. id.

Si no se conociera i' se calculará R haciendo $m = \frac{1}{7}$, cuando R_1 es el peso mas pequeño que produce la rotura, y $m = \frac{1}{10}$ en los casos ordinarios.

35. Los resultados relativos á la compresion son mas inciertos, pues como se verá mas adelante, este fenómeno está ligado con el de la flexion. Segun Rondelet y Hodgkinson, los trozos cúbicos de madera pueden resistir con seguridad en el sentido paralelo á las fibras de 0,40 á 0,60 kilógramos por milímetro cuadrado, y el valor de m que debe tomarse cuando no se conozca mas que la carga de rotura es lo mismo que antes (34) de $\frac{1}{10}$. Los esperimentos hechos sobre la rotura por compresion, dan los resultados siguientes:

Autores.	Clase de madera.	Carga de rotura por compresion Kil. por milº cuadº
R.	Encina	3,25. á 4,63.
H.(*)	Id. de Quebec	2,97.
R.	Pino	4,62 á 5,38.
H.	Pino rojo	3,79.
M.	Pino de Soria	2,62.
M.	Id. del Paular	3,12.
H.	Olmo muy seco	7,26.
H.	Haya	5,43.
H.	Nogal	4,26.

(*) Hodgkinson.

Resistencia de los metales.

36. Los metales, y especialmente el hierro, son los materiales que presentan en mas alto grado las propiedades elásticas, y resisten de diferente modo segun que sean dúctiles ó quebradizos. Son metales dúctiles generalmente los que se han batido en martinete ó se han pasado por el cilindro ó la hilera; y quebradizos los que se han echado fundi-

dos en un molde. Los primeros tienen una estructura fibrosa longitudinalmente, la fractura se nota terminada por ganchitos antes de romperse se dilatan mucho, y ceden visiblemente á los choques que les hacen vibrar. Los quebradizos tienen la estructura granosa, la fractura lisa; apenas se nota en ellos dilatacion cuando están á punto de romperse, y se quiebran como vidrio cuando reciben un golpe, sin doblarse antes de una manera sensible. El temple aumenta la elasticidad, y el recocido la disminuye algo.

37. El límite de las cargas permanentes guarda una relacion muy variable con la carga de rotura, por lo que el método de comparacion es menos aplicable á estos materiales que á los otros, y menos aun si se atiende á que las construcciones existentes son muy modernas para dar una gran seguridad sobre sus resultados. La resistencia permanente á la estension y á la compresion son casi iguales, segun se vé en la siguiente tabla, en que están los números como siempre referidos al milímetro y al kiló-

grano.

Resistencia permanente de los metales

Metales	Resistencia á la extension.	Resistencia á la compresion
Hierro dulce forjado de la mejor calidad	8.	7.
Hierro en barra ú hojas	6.	6.
Alambre delgado	10.	"
Alambre en cables	5.	"
Acero recocido	12.	"
Acero fino templado	33.	"
Hierro colado de grano fino	5.	6.
Fundicion gris	3.	4.
Cobre forjado	4.	"
Bronce fundido	4.	"
Plomo	0,2.	"

Los números que anteceden hacen ver que en todas las clases de hierro forjado se pue de tomar para las cargas permanentes, por término medio,

En construcciones ligeras ... R = 8,00 k. p.r mil. cuad.°
En construcciones comunes ... R = 6,00 id. id.
En construcciones escepcio-nales ... R = 4,00 id. id.

y para el hierro fundido habrémos de tomar

En construcciones ligeras ... R = 5,00 id. id.
En construcciones ordinarias ... R = 3,00 id. id.
En construcciones escepcionales ... R = 2,00 id. id.

38. Se debe notar que el hierro forjado ó dulce es preferible, bajo el punto de vista de la resistencia, al fundido para toda clase de construcciones, bien sea que resistan á la extension ó á la compresion, aunque la resistencia á la rotura instantánea sea en el primer caso mayor para el forjado, y en el segundo para el fundido; por que apesar de esto, las deformaciones empiezan siempre á ser permanentes en el fundido antes que en el forjado.

39. Cuando en alguna clase de hierro no se conocen los datos necesarios para determinar su resistencia permanente, se suele tomar el $\frac{1}{6}$ de la carga de rotura para el forjado, y

el $\frac{1}{5}$ para el fundido.

Resistencia de las cuerdas.

40. Los pocos experimentos que se poseen sobre la resistencia de las cuerdas dan los resultados siguientes:

Autores.	Clase de cuerdas.	Carga de r Kil. p.r mil.
Noirfontaine.	Calabrote de cañamo de Strasburgo, de 13 milím.s de diametro	9,50
id.	Id. id. id. de 25 mil.s id	6,30
id.	Id. id. id. de 33 mil.s id	5,40
id.	Cable del mismo cañamo de 40 milím.s de id	5,90
id.	Id. id. de 54 mil.s de id	4,85
id.	Cable de cañamo de Lorena, de 14 mil.s de id	7,10
id.	Id. id. id. de 23 mil.s de id	5,90
id.	Calabrote del mismo cañamo de 23 mil.s de id	7,30
Palacios.	Cañamo de Orihuela, de 1.a clase	8,30
id.	Id. id. de 2.a clase	8,99
id.	Id. de Granada, de 2.a y 3.a clase	8,73
id.	Id. de Calatayud, de 1.a clase	7,30
id.	Id. id. de 2.a clase	7,15
id.	Id. id. de 3.a clase	7,04
"	Correas (resistencia permanente)	0,20

La resistencia permanente se suele apre-

ciar en $\frac{1}{2}$ de la de rotura.

Los experimentos anteriores indican que la resistencia por unidad superficial disminuye cuando aumenta el diametro, lo que ha conducido á que en la marina francesa se use la siguiente fórmula empírica:

$$R_1 = (45 - 0,25\,c)\,c^2 ,$$

en la que c representa la circunferencia del cable en centimetros. En las obras no se dá tanta fuerza á las cuerdas.

Resistencia trasversal.

41. La resistencia permanente á una accion trasversal, se conoce con menos seguridad que la longitudinal, y para menos materiales. Los datos mejor conocidos son los siguientes:

Materiales.	Resistencia Kil. p.r mil. c.do
Hierro dulce	2,00
" fundido	0,67
Acero muy fino	2,00
Madera de pino perpendicularm.te á las fibras	0,14
Id. de encina perpendicularm.te á las fibras	0,13

Para piezas ligeras se puede tomar el doble.

La relacion ordinaria de las resistencias en los dos sentidos es $\frac{T}{R} = \frac{2}{5}$.

42. La resistencia á la rotura paralelamente á las fibras, obtenida arrancando los filetes de un tornillo, es:

Materiales.	Resistencia.	
Encina ----	1 kil. por mil.º cuadrado.	
Olmo ----	0,8 id	id.
Pino ----	0,5 id.	id.

Y la resistencia permanente puede tomarse $\frac{1}{10}$ de esta.

Nota.

Los esperimentos de algunos autores parecen indicar que ningun sólido puede sufrir una deformacion, por pequeña que sea, sin que quede una parte de ella permanente, y que por consiguiente no existen los límites de la elasticidad segun se han definido en esta leccion. Pero esta cuestion gravísima para la teoría de las acciones moleculares, es de ménos importancia para las aplicaciones, por que de todos modos es preciso admitir, que miéntras las deformaciones no pasen de cierto punto, no son peligrosas para las obras, y ese punto es entonces al que se aplica el cálculo que antecede sobre la resistencia permanente, y del que se deriva toda la teoría que vá á seguir, con sola la diferencia de que en lugar de llamarse límite de elasticidad, se deberia llamar límite de seguridad, ú otro nombre cualquiera que significase mejor su verdadero carácter.

Leccion 3.ª

Del equilibrio de los cuerpos elásticos.

43. Cuando varias fuerzas aplicadas de cualquier manera solicitan á un cuerpo elástico, es preciso en general que cambie de figura en toda su estension para que de la desigualdad de las fuerzas interiores que se originan, resulte el equilibrio con las primeras.

44. Considerando á cada cuerpo como compuesto de secciones materiales planas y equidistantes, perpendiculares á la linea que une sus centros de gravedad, para ver el cambio relativo de figura y de posicion de cada seccion respecto de su inmediata, basta considerar dos de estas, una de las cuales esté fija en todos sus puntos, y la otra sujeta á la accion de las fuerzas esteriores, trasmitida por el intermedio del resto del cuerpo. Sea A (fig.ª 7.ª) la primera de estas secciones y B la segunda: todas las fuerzas aplicadas á la última se pueden reducir á una sola P aplicada al centro de gravedad

g y un par cuyo eje sea gL. Las componentes F y H de la fuerza, paralela y perpendicular á la línea Gg de los centros de gravedad, producirán en todos los puntos de la seccion las desviaciones longitudinal y trasversal gg', gg'' constantes, cuyas magnitudes se calculan por las fórmulas (1) y (2) de la leccion 1.ª, haciendo en ellas

$$i = \frac{gg'}{Gg} \quad , \quad k = \frac{gg''}{Gg} \; ;$$

pero el par producirá una rotacion al rededor de cierto eje go, en general diferente para cada punto material de la seccion, de la que resultará la seccion B trasladada á la posicion B' y algo cambiada de figura, originandose de la desigualdad y divergencia de las desviaciones absolutas de las moléculas pares de resistencias, cuyo resultante hará equilibrio al par L aplicado.

45. Aunque las secciones no se conservan planas despues de la deformacion del cuerpo sino en algunos casos particulares, en los ordinarios en que la longitud del sólido es grande comparada con sus dimensiones trasversales, el alabeo que toman es bastante pequeño

para que se puedan considerar siempre como planas, en lo cual se comete un error pequeño y favorable á la solidez de las obras, como se verá mas adelante. Por esto, y por que la investigacion de esa curvatura es demasiado complicada para que tenga cabida en estos estudios, se supondrá siempre que las secciones primitivamente planas se trasladan y giran conservando siempre su forma y dimensiones, así como las de sus contornos.

46. Para calcular con mas sencillez la rotacion, se descompone siempre en otras dos, una al rededor del eje Gg prolongado, si es necesario, y otra al rededor de otro eje cd contenido en el plano de la seccion y en el de las rectas Gg y go. La primera rotacion se llama torsion y la segunda flexion, las cuales ponen en juego respectivamente las elasticidades trasversal y longitudinal. Cada una de estas rotaciones es debida á uno de los componentes N ó M del par L en sentido del eje Gg ó en el perpendicular dentro del plano GgL. El plano $aGgb$, perpendicular al eje de giro cd, se llama plano de la flexion, y el

$mGgl$, perpendicular al eje del par gM se llama plano de solicitacion.

Cada una de estas rotaciones se estudiará por separado y sin atender á las traslaciones que las acompañan (44) porque como las deformaciones que se consideran en este tratado son sumamente pequeñas, no importa para el resultado final el orden con que se supongan verificadas.

47. Con las hipótesis que anteceden es fácil calcular la espresion variable del aumento ó disminucion de distancia entre los puntos correspondientes de las secciones A y B, y la fuerza elástica elemental que resulta, prescindiendo de las acciones laterales (8), cuya influencia no es bastante grande para que introduzca alteracion sensible en los resultados. Sean A, B (fig.a 8.a) las proyecciones de las dos capas materiales inmediatas en el plano de la flexion; G y g las de sus centros de gravedad, M y m las de dos moléculas correspondientes, y B' y m' las posiciones de la seccion B y la molécula m despues de la flexion sola alrededor del eje proyectado en g. Lla-

mando α al ángulo de flexion BgB', y v_1 á la distancia mg desde la molécula m al eje de flexion, el producto αv_1 equivale al aumento ó disminucion de distancia mm', por ser siempre muy pequeño el ángulo α y la fuerza elástica elemental desenvuelta por la separacion ó aproximacion de m hasta m' será (6)

$$E \frac{mm'}{Mm} \times d\omega,$$

siendo $d\omega$ el área infinitamente pequeña que ocupa la molécula, y llamando z á la distancia primitiva Mm, esta espresion adquiere la forma

$$E v_1 \frac{\alpha}{z} d\omega.$$

48. La fuerza elástica debida á la torsion tiene una espresion análoga. Sea B (fig.a 9.a) la seccion en su posicion primitiva, B' la misma en su posicion final despues del giro, y g el centro de gravedad, proyeccion del eje de rotacion. Llamando θ al ángulo mgm' de la torsion y r á la distancia gm de la molécula m al centro, la variacion de distancia mgm' será θr, y la fuerza elástica elemental tendrá la espresion (50)

$$G r \frac{\theta}{z} d\omega.$$

49. Las ecuaciones de equilibrio entre los pares dados y los que resulten de la composicion de las fuerzas elásticas debidas al giro de las secciones toman su forma mas sencilla cuando se eligen para ejes de coordenadas los tres ejes principales de inercia de la seccion que pasan por el origen escogido. Sean gu, gv (figura 50) los que corresponden al plano de la seccion, quedando el tercero, que siempre es perpendicular á estos, proyectado en g; sea UU' el plano de solicitacion, ó sea el plano del par M, que se ha de equilibrar con las fuerzas elásticas perpendiculares al de la seccion, al paso que el par N, cuyo plano es paralelo á este, se ha de equilibrar por las fuerzas debidas á la desviacion lateral. Llamando u v á las coordenadas gp, pm de un punto m cualquiera, y r á la distancia gm, los momentos de las fuerzas elementales que corresponden á la molécula m serán

$$Ed\omega \times \frac{v_1 \alpha}{z} \times v,\ Ed\omega \frac{v_1 \alpha}{z} \times u,\quad Gd\omega \times \frac{r\theta}{z} \times r;$$

pero representando por Ψ el ángulo ugd, que forma el eje de flexion con el eje principal de inercia inmediato, se tendrá

$mp_1 = mp \cos.\Psi + pg\, \mathrm{sen.}\Psi$ ó sea $v_1 = v \cos.\Psi + u\, \mathrm{sen.}\Psi$, por ser mp_1 perpendicular á gd. Sustituyendo esta espresion en las anteriores, se convierten estas en las siguientes

$$Ed\omega \frac{\alpha}{z}(v^2 \cos\Psi + uv\, \mathrm{sen.}\Psi),\ Ed\omega \frac{\alpha}{z}(u^2 \mathrm{sen.}\Psi + uv \cos.\Psi),$$
$$Gd\omega \frac{\theta}{z} r^2.$$

La distancia z difiere infinitamente poco de ser constante en toda la extension de las dos capas A y B, aunque el eje del sólido sea curvo, por lo que la suma de estos momentos, estendida á toda la superficie de la seccion será

$$E\frac{\alpha}{z}\left[\cos\Psi \int_0^\omega v^2 d\omega + \mathrm{sen}\Psi \int_0^\omega uv\, d\omega\right],$$
$$E\frac{\alpha}{z}\left[\mathrm{sen.}\Psi \int_0^\omega u^2 d\omega + \cos.\Psi \int_0^\omega uv d\omega\right],\ G\frac{\theta}{z}\int_0^\omega r^2 d\omega.$$

Designando por I, I' y K los momentos de inercia de la masa de la seccion al rededor respectivamente de los ejes gu, gv y el perpendicular á ambos, se tendrá, por ser estos los principales

$$I = \int_0^\omega v^2 d\omega,\ I' = \int_0^\omega u^2 d\omega,\ K = \int_0^\omega r^2 d\omega,\ \int_0^\omega uv d\omega = 0,$$

y los momentos totales de las fuerzas elásticas se reducen á

$$EI\frac{\alpha}{z}\cos.\Psi,\ EI'\frac{\alpha}{z}\mathrm{sen}\,\Psi,\ GK\frac{\theta}{z}.$$

50. El par M se puede descomponer en dos,

cuyos planos sean respectivamente perpendiculares á gu y gv, sus intensidades serán, llamando α al ángulo $lg\overset{v}{u}$, $M \cos \alpha$ y $M \operatorname{sen} \alpha$, y las tres ecuaciones de equilibrio de rotacion toman la forma

$$M \cos \alpha = EI\frac{\alpha}{z}\cos \varphi,\quad M \operatorname{sen} \alpha = EI'\frac{\alpha}{z}\operatorname{sen} \varphi,\quad N = GK\frac{\theta}{z}$$

Las dos primeras ecuaciones determinan la posicion del eje de flexion por medio del ángulo φ y la magnitud de esta por medio del ángulo α: la última dá la magnitud de la torsion. Dividiendo la segunda por la primera resulta

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{I}{I'}\operatorname{tang} \alpha,$$

lo que indica que el eje de flexion cd y la traza ll' del plano de solicitacion son dos diámetros conjugados de la elipse central de los momentos de inercia, cuyos ejes son $\frac{1}{\sqrt{I}}$ y $\frac{1}{\sqrt{I'}}$, pues que esa ecuacion se puede poner bajo la forma

$$u \operatorname{tang} ugd \times \operatorname{co tang} ugl = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{I}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{I'}}\right)^2}.$$

51 Ordinariamente el plano del par que solicita á la flexion es perpendicular á uno de los ejes principales, y entonces se confunden uno

y otro con los de la flexion, porque siendo $\alpha = 0$ resulta $\varphi = 0$. En tal caso se anula la segunda ecuacion, y el equilibrio de rotacion queda espresado por las fórmulas

$$M = EI\frac{\alpha}{z} \;\ldots\ldots (3),\qquad N = GK\frac{\theta}{z} \;\ldots\ldots (4)$$

Las cantidades EI y GK que son la medida de la relacion entre los pares M y N, y los ángulos de deformacion α y θ, se llaman respectivamente momento de flexion y momento de torsion, y se designan con las letras ε y γ, tomando las ecuaciones anteriores la forma

$$M = \frac{\varepsilon\alpha}{z} \;\ldots\ldots (5),\qquad N \frac{\gamma\theta}{z} \;\ldots\ldots (6)$$

Momentos de inercia.

52. La importancia de los momentos de inercia en esta teoria hace conveniente detenerse en dar las espresiones de los de las figuras mas usuales en la aplicacion. Antes se observará que siendo (49)

$$r^2 = x^2 + y^2$$

se deberá tener

$$K = I + I'$$

53. Rectángulo. En un rectángulo (figura 33) cuyos lados sean $AB = b$, $AC = c$, resulta

$$\int_0^w v^2 dw = \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} du \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} v^2 dv\,;\quad \int_0^w u^2 dw = \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dv \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} u^2 du,$$

ó sea

$$I = \frac{bc^3}{12}\quad ; \qquad I' = \frac{b^3c}{12}\,;$$

de cuyas espresiónes se deduce que la mayor resistencia de un rectángulo á doblarse es cuando el plano de solicitacion es paralelo al lado mayor.

Si el eje de flexion hubiere de ser el lado CD, el momento de inercia sería el que corresponda á gu aumentado del área del rectángulo multiplicada por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes, cuya suma es

$$I_5 = \frac{bc^3}{12} + bc \times \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 = \frac{bc^3}{3}.$$

Para el cuadrado se tiene, haciendo $b = c$

$$I = I' = \frac{b^4}{12},$$

y lo mismo cualquiera que sea la direccion de los ejes respecto de los lados, porque en todo polígono regular, todos los diámetros son ejes principales de inercia.

54. Triángulo isósceles. En un triángulo cuya base es $BC = 2b$ y cuya altura es

$AD = c$ (fig.ª 32), los momentos de inercia se hallan mas fácilmente trasladando el orígen de coordenadas al punto A. Entonces se tiene

$$\int_0^w u^2 dw = \int_0^c dv \int_{-\frac{bv}{c}}^{+\frac{bv}{c}} u^2 du = \frac{b^3c}{6}\,,\quad \int_0^w v^2 dw = 2\int_0^b du \int_{\frac{cu}{b}}^{c} v^2 dv = \frac{bc^3}{2}\,,$$

de donde se deduce

$$I = \frac{bc^3}{2} - bc \times \left(\tfrac{2}{3}c\right)^2 = \frac{bc^3}{18}\,,\qquad I' = \frac{b^3c}{6}.$$

Si el triángulo es equilátero, haciendo $c = b\sqrt{3}$, resulta

$$I = I' = \frac{b^4}{2\sqrt{3}}$$

55. Rombo. Esta figura se puede considerar como compuesta de dos triángulos BCD, BAD (fig.ª 33) opuestos por su base, para el momento I, y de los otros dos ABC, ADC para el I', por lo cual dichos momentos son el doble del calculado arriba, resultando

$$I = \frac{bc^3}{3}\quad , \qquad I' = \frac{b^3c}{3}\,,$$

en cuyas fórmulas b y c son las semidiagonales.

56. Círculo. Llamando r á la distancia de cada punto m (fig.ª 34) al centro, r al radio de la circunferencia esterior, y α al ángulo que forma el radio gm con el eje gu, el momento de inercia respecto del eje pro–

yectado en g será

$$\int_0^{w} r'^2\, dw = \int_0^{r} r'^3\, dr' \int_0^{2\pi} d\alpha\,,$$

de donde resulta

$$K = \frac{\pi r^4}{2}:$$

Como en el círculo I es igual á I', habrá de ser (52)

$$K = 2I \qquad \text{ó sea} \qquad I = \frac{1}{2} K$$

y por consiguiente

$$I = \frac{\pi r^4}{4}.$$

57. Elipse. Los momentos de inercia de una elipse, cuyos semi-ejes son $gA = a$, $gB = b$ (fig.ª 5) son

$$I = \int_{-a}^{+a} du \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-u^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-u^2}} v^2\, dv\,, \quad I' = \int_{-b}^{+b} dv \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-v^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-v^2}} u^2\, du,$$

en los que efectuando la primera integracion resulta

$$I = \frac{b^3}{a^3} \int_{-a}^{+a} du \times \frac{2}{3}(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}\,, \quad I' = \frac{a^3}{b^3} \int_{-b}^{+b} dv \times \frac{2}{3}(b^2-v^2)^{\frac{3}{2}};$$

pero el factor integral es el momento de inercia de un círculo, cuyo radio es respectivamente a ó b, y equivale (56) á

$$\frac{\pi a^4}{4} \qquad \text{ó} \qquad \frac{\pi b^4}{4}$$

de lo que resulta

$$I = \frac{\pi a b^3}{4}\,, \qquad I = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

58. Los momentos de inercia de las figuras compuestas de otras se hallan sumando

los de cada una en particular respecto del eje que pasa por el centro comun de gravedad. Así, los momentos de inercia de un tubo rectangular (fig.ª 56) en que $AB = b$, $Bc = c$, $ab = b'$, $bc = c'$, son

$$I = \frac{bc^3 - b'c'^3}{12}\,, \qquad I' = \frac{cb^3 - c'b'^3}{12}\,,$$

si el tubo es cuadrado

$$I = I' = \frac{b^4 - b'^4}{12}$$

y si es circular

$$I = I' = \frac{\pi(r^4 - r'^4)}{4}$$

siendo r y r' los radios interior y exterior.

En una figura de doble T (fig.ª 57) en que $AB = b$, $BD = c$, $bf = ae = \frac{1}{2} b'$, $eh = c'$ el momento I es el mismo que el del tubo (fig.ª 56) siempre que $Bb = dD$: si la pieza está reforzada (fig.ª 58) su momento es

$$I = \frac{ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3}{12}$$

Una cruz (fig.ª 59) tiene por momento la suma de los de ambos brazos menos el de lo cuadrado central, cuya espresion es

$$I = I' = \frac{bc^3 - cb^3 - c^4}{12}$$

59. Cuando el espesor de los dos brazos paralelos de las formas anteriores es distinto, el momento no es el mismo, por que el centro de gravedad no es comun á todas las figuras que

componen la total.

Sean C y C' (fig.ª 20) los centros de los dos rectángulos ABED, abed, y sea d la distancia CC'. El centro de gravedad G se hallará á una distancia x de C dada por la ecuacion de momentos

$$bcx - b'c'(x+d) = 0,$$

de donde se deduce

$$x = \frac{b'c'd}{bc - b'c'}.$$

El momento total de inercia es igual á la diferencia de los de ambos rectángulos respecto del eje Gu. El del ABED es

$$\frac{bc^3}{12} + bcx^2,$$

el del abed es

$$\frac{b'c'^3}{12} + b'c'(x+d)^2,$$

de lo cual resulta, sustituyendo el valor de x

$$I = \frac{bc^3 - b'c'^3}{12} - \frac{bcb'c'd^2}{bc - b'c'}$$

El mismo resultado se obtiene para la figura 21, compuesta de dos mitades iguales á las de la figura 20.

Leccion 4.ª

De la flexion.

60. La dificultad que ofrece el exámen de los movimientos de traslacion y rotacion que se han estudiado en la leccion que precede, cuando se verifican á un mismo tiempo, y la circunstancia favorable de que este caso ocurra rarísimas veces en las aplicaciones á la construccion, son causa de que se haga por separado el estudio de cada una de las dos rotaciones de flexion y de torsion, lo mismo que en la leccion 3.ª se habia hecho con las dos traslaciones principales; y se estudiará mas detenidamente la flexion, porque es el movimiento que ofrece mas variedad y mayor número de aplicaciones.

61. Sean A, B, C, D (fig.ª 22) las secciones inmediatas de un sólido empotrado ó fijo por toda la seccion A, y cuyo eje, normal á todas ellas, pasa por los centros de gravedad respectivos a, b, c, d. En un punto cualquiera del cuerpo

obra una fuerza F, cuyo momento respecto de un centro de gravedad cualquiera se representará por M, siendo imposible la torsion, porque se supone que el plano del par que resulta es perpendicular al de la seccion respectiva, ó sea que N=0. Como el sólido dado es un sistema de figura variable, el equilibrio total debe resultar del equilibrio de cada una de las secciónes en particular entre las fuerzas interiores y las exteriores. Para que en la seccion D se equilibre el par que resulta de la traslacion de la fuerza F al punto a, ha de girar hasta una posicion D' en la que la resultante de las dilataciones de la parte superior á ca y la de las contracciones de la parte inferior formen un par equivalente y opuesto; despues de lo cual el sistema CcdD' formado por las dos secciónes C y D' se puede mirar como si fuera enteramente rigido y capaz de trasmitir á la seccion C el efecto de la fuerza F. Entonces esta seccion tiene que tomar la posicion C' para que las fuerzas elásticas que provienen de las moléculas de B se equilibren con el par que resulta de trasladar

la fuerza dicha al punto c, y por este nuevo giro, la seccion D' tendrá que pasar á D," conservandose iguales las figuras CcdD' y C'cd'D". Del mismo modo se ejercerá la accion de la fuerza sobre la seccion B; trasladándola á B', y la figura BcdD" á B'c'd"D"', con lo que quedará convertida la curva abcd en la abc'd". La linea que pasa por los centros de gravedad de las secciónes de un sólido despues de doblado se llama la elástica, y para que la elástica sea plana, es menester que tambien lo sea la curva primitiva del eje, y que los ejes de flexion sean perpendiculares á su plano.

62. La cantidad de la flexion que ocasiona una fuerza en cada punto de un sólido se mide por el ángulo $DdD'=\alpha$ (47), que por ser la figura CcdD' igual á C"c'd"D"', (61) equivale á c'o'd"—cod. Llamando α' y α á los ángulos que forma cada plano normal á un mismo punto de la curva antes y despues de la flexion con un plano fijo A, el ángulo cod de dos secciónes consecutivas estará representado por el incremento diferencial dα, el án-

gulo $c'o'd''$ por $d\alpha'$, y llamando s el arco de curva comprendido entre cada punto y un origen fijo a, se representará la distancia $cd = c'd''$ por ds, con lo cual se tendrá

$$\alpha = d\alpha' - d\alpha \quad , \quad z = ds \quad y \quad \frac{\alpha}{z} = \frac{d\alpha' - d\alpha}{ds},$$

tomando la ecuacion de equilibrio (5) la forma

$$M = \varepsilon \, \frac{d\alpha' - d\alpha}{ds} \text{ .... } (7).$$

Pero si se representan por ρ_s y ρ los radios de curvatura de las curvas $abcd$ y $abc'd''$ en los puntos c y c' por ser los planos C y D, C'' y D'' normales á las curvas de los ejes, se tendrá

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho_s} \quad , \quad d\alpha' = \frac{ds}{\rho},$$

y por consiguiente

$$M = \varepsilon \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right) \text{ ...... } (8)$$

63. Las variaciones de distancia que se producen entre las moléculas por la flexion, no han de pasar de las que corresponden al límite de la elasticidad, si los cuerpos que equilibran doblandose las fuerzas esteriores han de permanecer sin alteracion en sus propiedades, resistiendo á su accion de una manera permanente sin rasgarse ni aplastarse

por ninguna de sus caras. Siendo α el ángulo $B'gB$ de la flexion (fig.ª 8) y v la ordenada mg de un punto cualquiera m de la capa respecto del eje de giro, la dilatacion ó contraccion relativa que corresponde á ese punto es

$$\frac{mm'}{Mm} = \frac{v\alpha}{z},$$

y la condicion de resistencia suficiente en el punto m es (20)

$$\frac{v\alpha}{z} < \frac{1}{2} i';$$

ó sacando de la ecuacion (3) el valor de $\frac{\alpha}{z}$, y sustituyendo $\frac{R}{E}$ en lugar de $\frac{1}{2} i'$

$$\frac{vM}{EI} < \frac{R}{E}.$$

64. Representando por v' la ordenada del punto mas distante del eje de giro, ó sea la mayor ordenada de la seccion, la desigualdad que antecede se hallará verificada para todos los puntos de esta siempre que sea

$$\frac{v'M}{I} = \text{ó} < R.$$

Poniendo esta ecuacion bajo la forma usual

$$M = \frac{RI}{v'} \text{ .... } (9)$$

sirve para averiguar si una fuerza dada puede ser resistida en todas las secciones trasversales

del cuerpo que tiende á doblar. El segundo miembro $\frac{RI}{V'}$ recibe el nombre de momento de rotura de la seccion, y se representa por $\mathcal{M}$.

65. Si ademas de la flexion, hay un movimiento comun de dilatacion ó contraccion gg' (fig.ª 23) ocasionada por una componente Q paralela al eje, todos los puntos de la seccion B tienen una variacion relativa comun (6) $\frac{Q}{E\omega}$ y la variacion total $m\,m''$ es

$$mm' \pm m'm'' = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v\mathcal{M}}{EI},$$

poniendo á v con su signo. La mayor dilatacion ó contraccion relativa ha de ser menor que $\frac{R}{E}$, cuya condicion es en este caso

$$R = o > \frac{Q}{\omega} + \frac{v'\mathcal{M}}{I} \cdots\cdots (10)$$

66. La determinacion de la resistencia es la parte mas importante de los problemas que van á seguir. La suposicion de que la seccion B (figura 24) gira hasta la posicion B' conservándose plana (45) en lugar de alabearse algo como en la realidad suele suceder, no puede tener una influencia grande ni desfavorable, por que la verdadera figura que toma la seccion, es una

superficie curva semejante á $c\,g\,d$, con lo cual las variaciones de distancia de los puntos son un poco menores de lo que se supone, y por consiguiente la resistencia efectiva que resulta de las fórmulas (9) y (10) es un poco mayor que la que se pide ó se necesita.

67. La linea que une los puntos que no tienen aumento ni disminucion de distancia se llama el eje de fibras invariables. Cuando no hay ninguna fuerza paralela al eje del sólido, esta linea es la curva de los centros de gravedad, como está representada en la figura 22; pero si hay fuerzas de traccion ó presion, dicha linea se traslada á un punto o (fig.ª 23) cuya distancia al eje g es mayor cuanto mas grande es la traccion ó presion comparada con la flexion. Aunque de varias observaciones imperfectas se ha pretendido deducir que la linea de fibras invariables ó eje neutro no se halla donde la teoria indica, los muy delicados experimentos hechos hace dos años por W. H. Barlow no dejan la menor duda acerca de la exactitud de las indicaciones que preceden.

Momentos de rotura.

68. Los momentos de rotura de cada figura se hallan dividiendo el momento de inercia I por la mayor ordenada del contorno, y multiplicando por la resistencia específica R á la estension ó á la compresion, segun que esta mayor ordenada sea de la parte convexa ó de la parte cóncava del sólido doblado.

69. Rectángulo. En el rectángulo (figura 11) doblado por el ejé gu, (53)

$$I=\frac{bc^3}{12},\ v'=\frac{1}{2}c,\ \text{y por consiguiente}\ \tau=R\,\frac{bc^2}{6}.$$

Si los lados son iguales, se tiene

$$\tau=R\,\frac{b^3}{6},$$

pero si el ejé de flexion es la diagonal

$$\tau=\frac{Rb^3}{6\sqrt{2}};$$

de modo que el cuadrado, doblado en sentido de los lados, resiste mas que en el de las diagonales en la relacion de $\sqrt{2}:1$.

70. Rombo. El momento del rombo doblado por una de las diagonales es (55)

$$\tau=R\,\frac{bc^2}{3}.$$

71. Triángulo. Cuando está doblado por el ejé de figura, el momento de rotura es

$$\tau=R\,\frac{cb^2}{6}$$

y cuando por la paralela á la base,

$$v'=\frac{2}{3}c,\quad y\quad \tau=R\,\frac{bc^2}{12}$$

en la parte correspondiente al vértice y

$$v'=\frac{1}{3}c,\quad y\quad \tau=R\,\frac{bc^2}{6}$$

en la correspondiente á la base.

72. Elipse. Doblada por el ejé menor tiene por momento (57)

$$\tau=R\,\frac{\pi a^2 b}{4}$$

y el círculo (56)

$$\tau=R\,\frac{\pi r^3}{4}$$

73. En los tubos y T dobles se tiene

$$\tau=R\,\frac{bc^3-b'c'^3}{6c},$$

pero si los dos lados paralelos no son iguales, habrá que dividir el momento de inercia por la distancia del ejé de flexion al contorno de la figura, que es la suma ó la diferencia entre la mitad del lado c y la distancia x desde el centro de gravedad del rectángulo esterior al de la figura total ó sea $v'=\frac{c}{2}\pm\frac{b'c'd}{bc-b'c'}$.

74. En los tubos de hierro en que los lados superiores están muy distantes (fig.ª 25) y

las verticales ad, bc son tan delgadas que se pueda despreciar su resistencia en la del conjunto, se puede tomar por momento de inercia de cada lado horizontal el producto de su área por el cuadrado de la distancia al eje g u, porque el cubo de su espesor es despreciable.

Llamando A y A' á las áreas de los lados ab y cd, b y b' á las distancias be y ce, y d á la altura total bc, el momento de inercia aproximado será

$$I = Ab^2 + A'b'^2$$

y el de rotura

$$\tau = R\,\frac{Ab^2 + A'b'^2}{b};$$

pero por ser g el centro de gravedad se verifica que $Ab = A'b'$, luego

$$\tau = R\,\frac{Ab^2 + Abb'}{b} = RA(b+b')$$

ó sea

$$\tau = RAd.$$

75. El momento de un tubo circular, cuyos radios son r y r', es

$$\tau = R\,\frac{\pi(r^4 - r'^4)}{4r}$$

76. Los momentos de rotura sirven para comparar la resistencia de una seccion de cierta figura en sus diferentes posiciones, y las de dos

figuras distintas.

Una seccion rectangular deberá colocarse siempre de modo que el lado mayor sea paralelo al plano de la flexion; y de dos rectángulos de una misma área bc, tendrá mas resistencia el que tenga mayor el lado c. Sin embargo, la relacion de c á b no debe pasar de cierto límite, para que el sólido tenga estabilidad en los apoyos y le quede área suficiente para resistir á la desviacion lateral. Lo mismo debe decirse de las secciones elípticas.

77. Un tubo rectangular ó circular ó una doble T tienen mas resistencia y estabilidad que un prisma ó cilindro macizos, con la misma ó menos área, y tienen tanta mas resistencia cuanto mas dista del centro la corona sólida, lo cual se deduce fácilmente de las fórmulas de los números 69 y 73. Sean B y C los lados del rectángulo macizo, A su área y T su momento de rotura; y b, c, b', c' los lados del tubo, a su área y τ su momento de rotura. Los momentos respectivos serán

$$T = R\frac{Ac}{6}\quad,\quad \tau = Ra\frac{bc^3 - b'c'^3}{6c(bc - b'c')},$$

y su relacion, suponiendo que las areas A y a sean iguales

$$\frac{T}{\tau} = \frac{(bc-b'c')cc}{bc^3 - b'c'^3} = \frac{bc - b'c'}{bc - b'c'\frac{c'^2}{c^2}} \times \frac{c}{c},$$

fórmula en la cual el denominador es mayor que el numerador, siempre que c no sea mayor que c, que es lo que tiene que suceder para que las piezas tengan buenas proporciones, con arreglo á lo que se acaba de decir (76)

78. De todos los rectángulos inscritos en un mismo círculo, tiene mayor resistencia aquel, cuyos lados guardan la relacion $1 : \sqrt{2}$. En efecto, tomando por unidad el diámetro del círculo, los lados han de satisfacer á la relacion

$$b^2 + c^2 = 1$$

y el momento de rotura toma la forma

$$\tau = \frac{R}{6}(b - b^3)$$

cuyo máximo se verifica para $b = \sqrt{\frac{1}{3}}$, de lo cual se deduce $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Tomando $BC = \frac{1}{3}AB$ (fig.ª 26) y levantando la perpendicular CD, los lados AD y DB tienen entre sí dicha relacion.

79. Las figuras regulares tienen el mismo momento de flexion en todos sentidos, pero escepto el círculo, todas tienen el momento de rotura diferente, porque el valor de v' es variable en cada direccion. Estas figuras ofrecen la mayor resistencia cuando el eje de flexion está lo mas próximo que pueda al perímetro, porque siendo constante el numerador de la espresion $\frac{RI}{v'}$, es entonces cuando es mas pequeño el denominador. Conviene por esto que los ejes de rotacion que han de sostener grandes pesos tengan pocas partes salientes, porque el gran valor que puede tener en ellas v', es causa de que el momento de rotura sea muy pequeño cuando la flexion se opera sobre un eje como el gu (fig.ª 19)

80. En los ejemplos que siguen se halla la resistencia de sólidos de diferentes figuras solicitados diversamente por las fuerzas. En el mayor número de casos la seccion trasversal del sólido es constante en toda su estension, y su eje puede ser recto ó

curvo. Los sólidos de eje recto y seccion constante, ó sean los prismas elásticos, pueden ser perpendiculares, paralelos ú oblícuos á la accion de las fuerzas, y tomando siempre por tipo de estas la de la gravedad, se consideran aquellos como horizontales, verticales ó inclinados. En muchos casos se necesita conocer la flexion, dada por la ecuacion (5) para conocer la resistencia, que se calcula por la ecuacion (9), por cuyo motivo se entra en el estudio detenido de aquel fenómeno.

Lecciones 5.ª y 6.ª

Equilibrio y resistencia de los prismas horizontales.

23. Cuando el eje del sólido es una linea recta, su radio de curvatura es infinito, y la ecuacion (8) de la elástica se reduce á

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = M \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Esta ecuacion no es fácil de discutir en esta forma, y por eso se elimina el radio de curvatura ρ atendiendo á su valor general

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

cuyo valor, si se atiende á que el cuadrado de $\frac{dy}{dx}$ es muy pequeño comparado con la unidad, porque la flexion tiene que ser muy pequeña para que haya resistencia y seguridad suficiente en los prismas, se reduce á

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

y la ecuacion muy aproximada de la elástica será

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

82. El caso mas sencillo, y al cual se reducen todos los demas, es el de una pieza prismática representada por su eje AB (fig.ª 27) fija invariablemente ó sea empotrada en su extremo A y sujeta por el otro á un peso P, y colocada de modo que el plano vertical que pasa por el eje sea perpendicular á un eje principal de inercia de las secciones trasversales, para que la flexion se efectúe en ese mismo plano vertical. Este peso dobla al prisma segun la curva AB' cuya proyeccion horizontal difiere siempre tan poco de AB, que se considera como si fueran las dos líneas exactamente iguales. Para hallar su ecuacion se tomarán como ejes de coordenadas las rectas AB y su perpendicular, y haciendo

$$AB = a \;,\quad Ap = x, \quad pm = y,$$

el valor del momento M, para la seccion que corresponde á un punto cualquiera m será el producto

$$P \times pB = P\,(a - x)$$

y la ecuacion buscada es

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P\,(a - x).$$

Integrando resulta

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + c.$$

La constante c se determina por la condicion general de todo empotramiento, y es que la direccion del eje es en aquel punto invariable: segun esto, para el punto A, en que $x = 0$, se habrá de verificar que $\frac{dy}{dx} = 0$, y la ecuacion se reduce á

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Integrando de nuevo resulta

$$\varepsilon y = P\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + c.$$

Esta constante se determina por la condicion de que el punto A está fijo, cualquiera que sea la direccion del eje, lo cual exige que para $x = 0$, $y = 0$, y queda para ecuacion de la elástica

$$\varepsilon y = P\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3\right).$$

La mayor inclinacion y el mayor descenso ó la flecha de la elástica corresponde á lo punto B' y se encuentran haciendo $x = a$ en las dos últimas ecuaciones; y llamando α á su inclinacion y f á la flecha resulta

$$\operatorname{tang}.\alpha = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a^2}{2}.$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a^3}{3}.$$

83. Para obtener con toda exactitud la posicion de todos los puntos de la curva AB', es preciso añadir á la ordenada y de cada punto m la cantidad que habrá hecho bajar á la seccion dada al sólido por este punto la fuerza P trasladada paralelamente á si misma al centro de gravedad de dicha seccion, por causa de la desviacion lateral. La magnitud absoluta que corresponde al punto m, en que la longitud de la parte Am de prisma solicitada es x, tiene por espresion (50)

$$\frac{Px}{G\omega},$$

y entonces, el valor verdadero de la ordenada deberá ser

$$y = Px\left[\frac{1}{G\omega} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}ax - \frac{1}{6}x^2\right)\right],$$

y haciendo x = a se obtiene la flecha del punto B

$$f = Pa\left[\frac{1}{G\omega} + \frac{a^2}{3\varepsilon}\right].$$

Mas estos resultados demuestran que es inútil tener en cuenta esta desviacion, porque la pequeñez de sus efectos comparados con los de la flexion es tan grande, que complica las fórmulas sin que sea sensible la aproximacion que produce. En efecto, la relacion del primer término al segundo, en el valor de la flecha, es

$$\frac{3EI}{Ga^2\omega},$$

que en una viga de madera de 4 metros de longitud, 16 centímetros de ancho y 25 de alto equivale á $\frac{1}{410}$. El mayor peso que puede sostener permanentemente la estremidad de esta viga, que es de 250 kilógramos, solo produciria una flecha de 25,66 milímetros, de la cual solo 0,06 milímetros corresponden á la desviacion lateral.

84. Por esto no se tiene en cuenta mas que la accion del par en el cálculo de la resistencia. Para que esta sea suficiente es preciso que en todas las secciones del sólido se verifique

$$M = \text{ó} < \frac{RI}{V'},$$

y como la seccion es constante por suponerse el sólido prismático, el segundo miembro es constante, por lo cual la condicion anterior quedará satisfecha para todos los puntos si lo está para aquel en que M sea su máximo. Este momento tiene su mayor valor en el punto A, en que x = 0, y M = Pa, y la condicion buscada es

$$Pa = \frac{RI}{V'}.$$

Esta es la fórmula que se ha de aplicar para saber las dimensiones que ha de tener un prisma cargado con cierto peso, ó el peso que puede sostener un cuerpo de dimensiones conocidas.

Ejemplos.

Se quiere saber qué carga puede sostener en su estremidad una viga de madera de 4 metros de longitud, $0,^m36$ de base y $0,^m25$ de altura, empotrada en la otra estremidad. La fórmula anterior dá

$$P = \frac{0,6 \times 360 \times 250 \times 250}{6 \times 4000} = 250 \text{ kilógramos.}$$

Se quiere saber qué diámetro ha de tener una barra cilíndrica de hierro forjado de 2 metros de longitud, empotrada en una estremidad, para sostener por la otra un peso de 600 kilógramos. La fórmula a-

$$r^3 = \frac{4 \times 600 \times 2000}{3,14 \times 6} = 254777, \text{ y } r = 0,^m063.$$

85. Los puntos en que el momento M se acerca mas al valor del momento de rotura se llaman los puntos de rotura; y la seccion que corresponde á uno de ellos se llama seccion peligrosa. En los sólidos prismáticos el momento tiene su valor máximo en el punto de rotura, que es el de empotramiento, y en ellos afecta la elástica su mayor curvatura, porque el radio ρ es el mas pequeño, segun lo hace ver la ecuacion (55).

86. Cuando los pesos están repartidos de una manera contínua en la estension del prisma AB (fig.ª 28) el momento de todas las fuerzas que hay en la longitud mB' respecto del punto m se halla sumando los de las fuerzas elementales que corresponden á las longitudes infinitamente pequeñas, como nn'. Llamando p al peso por unidad de longitud de la absisa que obra en el punto n, y x' á la absisa de este punto, y en general de un punto cualquiera comprendido entre B, cuya absisa es a, y m, cuya absisa es x, la fuerza elemental que carga sobre nn' es pdx'; su momento respecto del punto m es

$$pdx' \times pq = pdx'(x' - x),$$

y el momento de todo el peso que carga sobre mB' es

$$M = \int_x^a pdx'(x' - x).$$

Cuando la carga está uniformemente repartida en toda la longitud AB, p es una cantidad constante, y la integral anterior se reduce á —

$$M = \frac{1}{2}\, p\, (a - x)^2.$$

En este caso, la ecuacion de la elástica y sus integrales son

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{2}\, p\, (a - x)^2 \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dx} = p \left(\dfrac{1}{2}\, a^2 x - \dfrac{1}{2}\, a x^2 + \dfrac{1}{6}\, x^3\right) \\ \varepsilon\, y = p \left(\dfrac{1}{4}\, a^2 x^2 - \dfrac{1}{6}\, a x^3 + \dfrac{1}{24}\, x^4\right), \end{array}\right.$$

de las que se deduce

$$\text{tang.}\, \alpha = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{6}$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{8},$$

con lo que se vé que la carga repartida en la longitud, encorva á las piézas mucho menos que si se reune en la estremidad.

87. El punto de rotura es el estremo fijo A, en que el momento es el mayor y la ecuacion de la resistencia

$$\frac{1}{2}\, p a^2 = \frac{RI}{v'}$$

hace ver que una misma pieza prismática es capaz de llevar doble peso repartido uniformemente que reunido en su estremidad.

Estas ecuaciónes pueden servir para

tener en cuenta el efecto del peso propio de los sólidos, cuando son muy grandes. Si el sólido AB (fig.ª 27) estuviese cargado de pesos repartidos uniformemente, ademas del peso P, la ecuación de equilibrio sería

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P\,(a - x) + \frac{1}{2}\, p\, (a - x)^2;$$

y la de resistencia

$$Pa + \frac{1}{2}\, p a^2 = \frac{RI}{v'},$$

que son el resultado de sumar las de los dos casos anteriores.

88. Cuando un sólido está sujeto á la accion de varias fuerzas en diferentes puntos de su longitud, se considera dividido en varios sólidos contando como uno diferente á cada parte que queda comprendida entre dos puntos de aplicacion. Las condiciónes que determinan las dos constantes que resultan de la integracion de cada parte, son, que en la union con la que le antecede ó le sigue haya coincidencia, lo que se verifica si tienen comun la ordenada, y haya tambien continuidad, para lo que han de tener la tangente comun en esos puntos. Cada parte tendrá un punto particular de rotura, pero la pieza no tendrá en general mas que uno, que será

aquel en que entre todos tenga mayor momento las fuerzas esteriores. Sea AB (fig.ª 29) por ejemplo, una pieza prismática empotrada en A, solicitada en B por un peso P y en C por una fuerza Q paralela á esta, pero dirigida en sentido contrario. Si despues de establecido el equilibrio se supone rígida la parte AC, el estado mecánico de la parte CB no habrá variado y se podrá considerar como una pieza recta empotrada en C y solicitada en B por el peso P, cuya ecuacion de equilibrio es, llamando a á la distancia AB

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x),$$

en la que se deduce para la parte CB

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + C \\ \varepsilon y = P\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + Cx + D, \end{cases}$$

siendo C y D constantes arbitrarias.

Si ahora no se supone rígida é inalterable solo la parte CB, el estado de la AC se habrá variado, y se podrá calcular como una pieza recta sujeta á una fuerza P en su estremidad y á otra Q en el punto C, cuya abscisa AC se representará por a': las ecuaciones de la elástica son entonces para la parte

AC

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} = P(a-x) - Q(a'-x) \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) - Q\left(a'x - \frac{1}{2}x^2\right) + C' \\ \varepsilon y = P\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3\right) - Q\left(\frac{1}{2}a'x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + C'x + D' \end{cases}$$

Las cuatro constantes que hay en estas ecuaciones se determinan por las cuatro condiciones de que en el punto A, la ordenada y la inclinacion de la tangente sean cero, y que en el punto C, una y otra sean comunes á AC y CB. Estas condiciones dan el resultado siguiente:

$$C' = 0,\quad D' = 0,\qquad C = -\frac{1}{2}Qa'^2,\quad D = \frac{1}{6}Qa'^3$$

La seccion peligrosa de la parte CB está en el punto C en que la ecuacion de la resistencia es

$$P(a-a') = \frac{RI}{V'}$$

y la de la parte AC está en el punto A en que dicha ecuacion es

$$Pa - Qa' = \frac{RI}{V'},$$

y el de mas fácil rotura de toda la pieza será el uno ó el otro, segun que sea P mayor ó menor que Q.

89. En el caso particular en que P=Q, la parte AC se encorva en arco de círculo, porque

siendo constante el momento respecto de cualquier punto, por que las dos fuerzas forman un par, el radio de curvatura es constante, como lo demuestra la ecuacion (11). La rotura es entonces indiferente en cualquier punto de la estension AC.

90\. Cuando las piezas están apoyadas en alguno de sus puntos, se consideran como si estuviesen enteramente libres y sujetas á la accion de fuerzas, equivalentes á las reacciones de los apoyos. Estas reacciones se determinan por las reglas de Estática, y cuando no son suficientes se completan con las condiciones que resultan de la continuidad de las piezas en los puntos apoyados. El primer caso no se verifica mas que cuando la pieza está simplemente apoyada por dos puntos.

91\. Ejemplo de esto es la pieza AB (Fig.ª 30) apoyada en los dos puntos A y B y solicitada por el peso $2P$ en un punto C y por una carga repartida uniformemente en cierta estension MN. Siendo E el punto medio de AB y O el de MN, y haciendo

$$Ec=d,\ Eo=d',\ AB=2a,\ MN=2a'$$

las presiones del prisma sobre los apoyos, iguales y contrarias á las reacciones de estos, se deducirán por las reglas de la composicion de las fuerzas paralelas, y son

$$Q=\frac{P(a-d)+pa'(a-d')}{a},\quad Q'=\frac{P(a+d)+pa'(a+d')}{a},$$

cuyas fuerzas se pueden suponer aplicadas á los puntos A y B, suprimiendo los apoyos.

Este prisma se puede considerar compuesto de cuatro partes; BM, MC, CN y NA. Colocando en C el origen de coordenadas, las ecuaciones de la parte BM se obtendrán considerandola empotrada en M y sujeta en B á la fuerza Q', y serán

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}&=Q'(a-d-x)\\ \varepsilon\frac{dy}{dx}&=Q'\left[(a-d)x-\tfrac{1}{2}x^2\right]+C\\ \varepsilon y&=Q'\left[\tfrac{1}{2}(a-d)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right]+Cx+D. \end{aligned}\right.$$

Las ecuaciones de la parte CM, empotrada en C, solicitada de arriba abajo por los pesos que sostiene, y de abajo arriba por la accion Q', son

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}&=-\tfrac{1}{2}p(a'+d'-d-x)^2+Q'(a-d-x)\\ \varepsilon\frac{dy}{dx}&=-\tfrac{1}{2}p\left[(a'+d'-d)^2x-(a'+d'-d)x^2+\tfrac{1}{3}x^3\right]+Q'\left[(a-d)x-\tfrac{1}{2}x^2\right]+C'\\ \varepsilon y&=-\tfrac{1}{2}p\left[\tfrac{1}{2}(a'+d'-d)^2x^2-\tfrac{1}{3}(a'+d'-d)x^3+\tfrac{1}{12}x^4\right]+Q'\left[\tfrac{1}{2}(a-d)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right]+C'x+D' \end{aligned}\right.$$

Las ecuaciones de la parte CN se obtie-

nen del mismo modo, y tomando ahora como positivas las abcisas desde C hácia A, son

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}p(a'-d'+d-x)^2+Q(a+d-x)$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}p[(a'-d'+d)^2x-(a'-d'+d)x^2+\frac{1}{3}x^3]+Q[(a+d)x-\frac{1}{2}x^2]+C''$$

$$\varepsilon y=-\frac{1}{2}p[\frac{1}{2}(a'-d'+d)^2x^2-\frac{1}{3}(a'-d'+d)x^3+\frac{1}{12}x^4]+Q[\frac{1}{2}(a+d)x^2-\frac{1}{6}x^3]+C''x+D''$$

Y por fin, las ecuaciónes de la parte NA, considerada como si estuviéra empotrada en N y solicitada en A por la fuerza Q, son

$$\left\{\begin{aligned}\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}&=Q(a+d-x)\\ \varepsilon\frac{dy}{dx}&=Q[(a+d)x-\frac{1}{2}x^2]+C'''\\ \varepsilon y&=Q[\frac{1}{2}(a+d)x^2-\frac{1}{6}x^3]+C'''x+D'''\end{aligned}\right.$$

92. Las ocho constantes de estas ecuaciónes se determinan por las condiciónes siguientes: 1.º Que los puntos A y B tengan igual ordenada, por que están á nivel; 2.ª que en el punto M la tangente de los dos trozos de curva sea la misma; 3.ª que en este punto sea la misma la ordenada de ambos trozos CM y MB; 4.º que en el punto C sea una misma la tangente de las partes CN y CM, para lo cual han de dar resultados iguales y de distinto signo las ecuaciónes respectivas cuando $x=0$; 5.º que la curva CM pase por el origen

C; 6.ª que la curva CN pase por el mismo punto; 7.ª que en el punto N sea comun la tangente de las partes AN y NC; y 8.ª que la ordenada de estas partes sea tambien la misma.

93. El punto de rotura está entre M y N y su posición depende del modo con que están distribuidos los pesos. La determinación de este punto y de las constantes de las ecuaciónes anteriores es muy sencilla en algunos casos particulares. Si no hay peso distribuido en la longitud del sólido (fig.ª 31) p es igual á cero, y las cuatro ecuaciónes anteriores se reducen á dos; el punto de rotura es el C en que está colocado el peso, y la resistencia del sólido está espresada por la ecuación

$$\tau=P\frac{a^2-d^2}{a},$$

la que hace ver que la posición mas desfavorable del peso es en el punto medio C de la pieza (fig.ª 32) en que la ecuación es

$$\tau=Pa.$$

94. Si el prisma sostiene solamente la carga repartida uniformemente en un espacio MN (fig.ª 33), $P=0$, y poniendo el

origen de coordenadas en el punto O medio de MN, d es igual á d, y las ecuaciones anteriores toman la forma,

para NB ..... $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{a}(a+d)(a-d-x)$

para ON ..... $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}p(a'-x)^2 + p\frac{a'}{a}(a+d)(a-d-x)$

para OM ..... $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}p(a'-x)^2 + \frac{pa'}{a}(a-d)(a+d-x)$

para MA ..... $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{a}(a-d)(a+d-x)$

cuyas ecuaciones indican que el punto de rotura de la parte MB se halla en M, en que $x=a'$; el de la parte OM en O, en que $x=0$, el de NA en N en que $x=a'$, y el de ON en un punto C en que $x=\frac{a'd}{a}$, siendo este último el de toda la pieza, porque produce el maxîmo mayor de los cuatro. La ecuacion de la resistencia será

$$\tau = pa'\left(a-\frac{1}{2}a'\right)\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right),$$

en la que se vé que la resistencia de la pieza será tanto mayor cuanto mas lejos del centro esté la carga.

95. Si la carga se estiende sobre toda la longitud AB (fig.ª 34) $d=0$, y $a'=a$, y las ecuaciones anteriores se reducen á dos iguales, que pertenecen cada una á las mitades OA, OB del sólido, y son de la forma

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}p(a-x)^2 + pa(a-x) = \frac{1}{2}p(a^2-x^2),$$

y el punto de rotura es el O, en el cual

$$\tau = \frac{1}{2}pa^2;$$

lo que dice, que este sólido puede recibir doble carga repartida uniformemente, que concentrada en el punto medio (93).

96. Si el peso 2P estuviese colocado en el punto medio al mismo tiempo que la carga uniformemente repartida (fig.ª 35), la ecuacion de equilibrio de cada parte CA ó CB sería la anterior, añadiéndole el momento de la reaccion que corresponde por el peso 2P ó

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}p(a^2-x^2) + P(a-x),$$

y el momento de rotura será

$$\tau = Pa + \frac{1}{2}pa^2;$$

por que la seccion peligrosa está en el punto medio.

97. Un sólido prismático (fig.ª 36) cargado desde el punto M al N con pesos que varien proporcionalmente á su distancia al punto M, y repartidos uniformemente desde N á B, debe considerarse dividido en tres partes, AM, MN, y NB, enlazadas por las condiciones de continuidad y coincidencia (88) y

sujetas á las reacciones Q, Q' de los apoyos.

Sean

$AB = a$, $Bm = b$, $Bn = b'$,

y sea tambien M el origen de coordenadas y p la carga por unidad de longitud que corresponde á la parte NB, con lo cual la que corresponda á un punto o situado entre M y N, será

$$\frac{px}{b-b'}.$$

Las ecuaciones de equilibrio, obtenidas por la traslacion de las fuerzas al punto B, son

$$Q + Q' = pb' + \int_0^{b-b'} \frac{px\,dx}{b-b'} = \frac{1}{2}p\,(b+b')$$

$$Qa = \int_0^{b-b'} \frac{px\,dx}{b-b'}(b-x) + \frac{1}{2}pb'^2 = \frac{1}{6}p\,\frac{b^3-b'^3}{b-b'}.$$

de las que resulta

$$Q = \frac{1}{6}p\,\frac{b^3-b'^3}{a(b-b')},\quad Q' = \frac{1}{2}p\,(b+b') - \frac{1}{6}p\,\frac{b^3-b'^3}{a(b-b')}.$$

Para el equilibrio de las fuerzas elásticas, se considerará la pieza compuesta de tres partes; una NB, fija en N y sujeta á los pesos uniformemente repartidos y á la fuerza Q'; otra NM, fija en N, sujeta á los pesos repartidos proporcionalmente y á la fuerza Q; y otra MA fija en M y sujeta á la fuerza Q.

Las ecuaciones de equilibrio son

para NB ..... $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Q'(b-x) - \frac{1}{2}p\,(b-x)^2$;

para NM ..... $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Q(a-b+x) - \int_0^x \frac{px'dx'}{b-b'}(x-x') =$

$$= Q\,(a-b+x) - \frac{px^3}{6(b-b')};$$

para MA ..... $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Q\,(a-b-x)$,

en cuyas ecuaciones, x' es la abscisa de un punto intermedio entre M y o. El punto de rotura de la parte NB se halla á una distancia del punto B igual á $\frac{Q'}{p}$, á no ser que esta cantidad sea mayor que b', en cuyo caso no puede ser mas que el mismo punto N. El de la parte MN se halla á una distancia del punto M igual á

$$\sqrt{\frac{b^3-b'^3}{3a}},$$

y será tambien el mismo punto N si esta espresion es mayor que $b-b'$. Finalmente el del trozo MA es el punto M, y el de la pieza es de los tres el que produce mayor momento, que será siempre uno de los dos primeros. Este problema tiene aplicacion al caso de una pieza de compuerta bañada de agua por ambos lados y á diferente nivel. El caso mas desfavorable es aquel en que $b = a$ y $b' = 0$.

98. Cuando una pieza se halla apoyada en mas de dos puntos (fig.ª 37), queda indeterminada la repartición de las presiones por las reglas de estática; pero las condiciones de continuidad permiten determinar siempre estas presiones cuando el prisma es elástico. En efecto, sea n el número de intervalos que hay entre los apoyos AA', $A'A''$, &ª: suponiendo que el sólido no esté cargado mas que en un punto de cada uno, el número de partes en que se habrá de considerar dividido será $2n$ (88), y el número de reacciones Q, Q' &c será $n+1$. El equilibrio directo entre los pesos P, P', P'' &ª y las reacciones, no proporciona mas que dos ecuaciones; pero las $4n$ constantes que han de producir las dos integraciones de la ecuación de cada parte AC, CA', $A'C'$, &ª quedan determinadas por la condición de que cada una de las partes ha de pasar por uno de los apoyos, lo que ya determina $2n$ constantes y las dos condiciones de continuidad y coincidencia en cada uno de los n puntos C, C', &ª determinan otras $2n$ constantes, con lo cual quedan to-

davía las condiciones de continuidad en los apoyos intermedios A', A'' &c que son $n-1$, y que con las 2 de equilibrio hacen las $n+1$ que se necesitan. Se vé segun esto que en casos semejantes, para hallar la ecuación de la resistencia es indispensable integrar primero las de equilibrio.

99. El caso mas sencillo es aquel en que los apoyos son tres, B, A, B' (fig.ª 38), y colocados en una línea horizontal. Haciendo $AB = a$, $AB' = a'$, suponiendo que hay una carga uniformemente repartida sobre la longitud BB', y pesos P, P' colocados en puntos intermedios C, C', distantes del punto A, que se tomará como origen de coordenadas, longitudes b y b'; y llamando Q, Q' y q á las reacciones de los tres apoyos, las ecuaciones de equilibrio serán

para CB:
$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} &= -Q(a-x) + \tfrac{1}{2}p(a-x)^2 \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= -Q\left(ax - \tfrac{1}{2}x^2\right) + \tfrac{1}{2}p\left(a^2x - ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right) + C \\ \varepsilon y &= -Q\left(\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right) + \tfrac{1}{2}p\left(\tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{12}x^4\right) + Cx + D. \end{aligned}\right.$$

para AC:
$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} &= -Q(a-x) + P(b-x) + \tfrac{1}{2}p(a-x)^2 \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= -Q\left(ax - \tfrac{1}{2}x^2\right) + P\left(bx - \tfrac{1}{2}x^2\right) + \tfrac{1}{2}p\left(a^2x - ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right) + A \\ \varepsilon y &= -Q\left(\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right) + P\left(\tfrac{1}{2}bx^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right) + \tfrac{1}{2}p\left(\tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{12}x^4\right) + Ax + B. \end{aligned}\right.$$

y para AC' y $C'B'$ las mismas ecuaciones acentuando todas las letras. La condición de pasar la parte CB por el punto B, en que $x=a$ é $y=0$, dá la ecuación

$$-\frac{1}{3}Qa^3+\frac{1}{8}pa^4+Ca+D=0$$

y la condición de que la parte AC pase por el punto A, en que $x=0$ é $y=0$ dá

$$B=0.$$

La condición de coincidencia de AC y AC en el punto C, en que $x=b$, dá

$$Cb+D=\frac{1}{3}Pb^3+Ab,$$

y la condición de continuidad en el mismo punto es

$$C=\frac{1}{2}Pb^2+A.$$

De estas ecuaciones se deducen los valores de las constantes

$$A=\frac{1}{3}Qa^2-\frac{1}{2}Pb^2+\frac{1}{6}P\frac{b^3}{a}-\frac{1}{8}pa^3$$

$$C=\frac{1}{3}Qa^2+\frac{1}{6}P\frac{b^3}{a}-\frac{1}{8}pa^3$$

$$D=-\frac{1}{6}Pb^3;$$

y para las ecuaciones de la parte AB' se obtendrían los mismos valores con todas las letras acentuadas.

Ahora ya se puede escribir la condición de continuidad en el punto A y

es que las tangentes de las partes AC y AC' sean una prolongación de otra, que como las abscisas se cuentan positivas á distinto lado para cada curva, equivale á decir que los coeficientes diferenciales de sus dos ecuaciones sean iguales y de signo contrario para $x=0$; esto dá

$$A=-A'$$

ó sea

$$\frac{1}{3}Qa^2-\frac{1}{2}Pb^2+\frac{1}{6}P\frac{b^3}{a}-\frac{1}{8}pa^3+\frac{1}{3}Q'a'^2-\frac{1}{2}P'b'^2+\frac{1}{6}P'\frac{b'^3}{a'}-\frac{1}{8}pa'^3$$

cuya ecuación junta con las dos de equilibrio directo

$$Q+Q'+q=P+P'+p(a+a')$$

$$Qa-Q'a'=Pb-P'b'+\frac{1}{2}p(a^2-a'^2),$$

dá los valores siguientes de las reacciones;

$$Q=\frac{P\frac{b}{a}(2a^2+3ab-b^2)-P'\frac{b'}{a'}(2a'^2-3a'b'+b'^2)}{2a(a+a')}+\frac{1}{8}p\left(3a+a'-\frac{a'^2}{a}\right)$$

$$Q'=\frac{-P\frac{b}{a}(2a^2-3ab+b^2)+P'\frac{b'}{a'}(2a'^2+3a'b'-b'^2)}{2a(a+a')}+\frac{1}{8}p\left(3a'+a-\frac{a^2}{a'}\right)$$

$$q=P+P'-\frac{a'-a}{aa'(a+a')}(Pba-P'b'a')-\frac{P\frac{b^2}{a}(3a-b)+P'\frac{b'^2}{a'}(3a'-b')}{2aa'}+\frac{1}{8}p(a+a')\left(5+\frac{(a-a')^2}{aa'}\right)$$

Las fuerzas Q y Q' son menores que las presiones que se ejercerían en los puntos B y B' si la pieza estuviese cortada en el punto A, que son $P\frac{b}{a}+\frac{1}{2}pa$, y $P'\frac{b'}{a'}+\frac{1}{2}pa'$, y la presión q por el contrario, es mayor:

Podrá suceder que alguna de las dos primeras fuerzas sea negativa, tendiendo la pieza entonces á levantarse por el apoyo á que corresponda.

100. Suponiendo simétricas las dos partes de la pieza, $a = a'$, $b = b'$, $P = P'$ y $Q = Q'$, y se tendrá

$$Q = Pb^2 \frac{3a - b}{2a^3} + \frac{3}{8} pa$$

$$q = P \frac{2a^3 - 3ab^2 + b^3}{a^3} + \frac{5}{4} pa$$

y si el peso está en el medio de cada trozo l, $b = \frac{1}{2} a$, y

$$Q = \frac{5}{16} P + \frac{3}{8} pa$$

$$q = \frac{22}{16} P + \frac{10}{8} pa,$$

con lo que se vé que la carga p oprime al punto medio A una cuarta parte mas que si las dos partes AB, AB' estuviesen separadas, y los pesos P en $\frac{3}{8}$ mas.

101. En todos estos casos, la resistencia de la pieza es mayor que si estuviese interrumpida en el punto A, porque siendo la reaccion Q menor que si la parte BA no continuase unida á la que le sigue, el momento de las fuerzas que corresponden á cualquier punto de su longitud será tambien

menor. En general hay tres puntos de rotura, que cuando no hay pesos repartidos en la longitud de la pieza son los A, C y C' en los que la curvatura está dirigida alternativamente en sentidos contrarios, con un punto de inflexion entre cada dos de ellos.

102. Un prisma empotrado por un estremo y apoyado por el otro á un mismo nivel (figura 39) es lo mismo que la mitad de una pieza apoyada en tres puntos equidistantes y cargada simétricamente, porque en tal caso, la tangente en el apoyo intermedio es horizontal: por consiguiente, este caso está incluido en el anterior.

103. En todo lo que precede se han considerado las presiones en los puntos de apoyo como verticales, segun son al empezar la flexion, pero despues de establecido el equilibrio, la presion en el punto B será normal á la elástica y en la direccion BR (figura 40) y descompuesta en sentido vertical y horizontal, dará una componente BQ, que habrá de satisfacer á todas las condiciones espuestas, y otra BS que tiende á aumentar la curvatura y la presion

longitudinal. Mas esta fuerza se ha despreciado, por que es muy pequeña comparada con la reaccion Q, pues equivale á Q tang. $RBQ = Q$ tang. tbx, siendo Bt la tangente á la elástica en el punto B, y se sabe que su inclinacion con la horizontal es muy pequeña en los límites en que la flexion sigue las leyes que se han supuesto, y que el error á que esto puede conducir es insignificante.

104. La condicion de que el otro estremo B esté empotrado (figura 45) se puede reemplazar por una fuerza Q que mantenga al punto B en su posicion, equilibrando la accion de las fuerzas que tienden á hacerle bajar, añadiendo un par M de eje horizontal, perpendicular al plano de la flexion, que obligue á la prolongacion BD de la pieza á girar hasta tomar la direccion que se prescribe para el punto B. Suponiendo cargada la pieza del peso P y de pesos uniformemente repartidos en la longitud AB, las ecuaciones de equilibrio son:

para la parte CB

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} = M - Q(a-x) + \frac{1}{2} p (a-x)^2 \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dx} = Mx - Q(ax - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2} p (a^2x - ax^2 + \frac{1}{3}x^3) + A \\ \varepsilon y = \frac{1}{2} Mx^2 - Q(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2} p (\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{12}x^4) + Ax + B. \end{cases}$$

para la parte AC.

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2y}{dx^2} = M - Q(a-x) + P(b-x) + \frac{1}{2} p (a-x)^2 \\ \varepsilon \dfrac{dy}{dx} = Mx - Q(ax - \frac{1}{2}x^2) + P(bx - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2} p (a^2x - ax^2 + \frac{1}{3}x^3) + A' \\ \varepsilon y = \frac{1}{2} Mx^2 - Q(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3) + P(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2} p (\frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{12}x^4) \\ \qquad + A'x + B'. \end{cases}$$

Las condiciones de que la curva AC pase por el punto A y sea horizontal, ó que para $x = 0$, $y = 0$ y $\frac{dy}{dx} = 0$, dan

$$A' = 0, \quad B' = 0;$$

y las condiciones de coincidencia y continuidad en el punto C en que $x = b$, dan

$$A = \frac{1}{2} Pb^2 \quad , \quad B = -\frac{1}{6} Pb^3;$$

y finalmente, las condiciones de que la curva pase por el punto B, y sea allí horizontal, ó que para $x = a$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, dan

$$Q = P \frac{b^2}{a^3} (3a - 2b) + \frac{1}{2} pa$$

$$M = P \frac{b^2}{a^2} (a - b) + \frac{1}{12} pa^2.$$

En el caso en que el peso esté colocado en el punto medio de AB, $b = \frac{1}{2} a$, y las espresiones últimas se convierten en estas

$$Q = \frac{1}{2} (P + pa) \quad , \quad M = \frac{1}{8} Pa + \frac{1}{12} pa^2.$$

105. La pieza presenta tres puntos de ma-

xima curvatura y dos de inflexion. Cuando $p=0$, estos tres puntos son el A, el B y el C, y la curvatura de los tres es la misma si este último equidista de los otros dos, ó $b=\frac{1}{2}a$. Entonces la ecuacion de la resistencia en cualquiera de ellos es

$$\tau=\frac{1}{8}Pa$$

ó haciendo $P=2P'$, $a=2a'$

$$\tau=\frac{1}{2}P'a',$$

cuyo resultado indica que la resitencia de una pieza empotrada en sus dos estremidades y cargada de un peso en el medio es doble que la de una pieza simplemente apoyada (figura 32).

Si en las ecuaciones anteriores se hiciera $P=0$, el mayor momento resultaria para los puntos A y B, en que seria

$$\tau=\frac{1}{32}pa^2$$

ó haciendo $a=2a'$

$$\tau=\frac{1}{8}pa'^2$$

lo que indica que la pieza tiende á desprenderse por sus empotramientos, y que puede resistir una mitad mas de carga que si estuviera solo apoyada, como en la figura 34.

Leccion 7ª

Equilibrio y resistencia de prismas verticales.

106. Sea AB (figª 42) la elástica de una pieza prismática que se ha desviado de su posicion vertical segun Ab por la accion del peso Q que obra á una distancia BC del punto B. Tomando para eje de abscisas la línea OC segun la cual actua el peso, y por eje de ordenadas la horizontal que pasa por el punto A, en que coincide la pieza con su direccion primitiva, la ecuacion de equilibrio, cualquiera que sea la posicion del peso respecto de la pieza, es

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-Qy,$$

con el segundo miembro negativo por que el sentido positivo de las abscisas es contrario al del peso. Multiplicando ambos miembros por $2dy$, é integrando, resulta

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=C-\frac{Q}{\varepsilon}y^2;$$

y llamando en general f á la distancia OA, que corresponde al punto en que la tangente es paralela al eje de abscisas, ó $\frac{dy}{dx} = 0$, la constante anterior es

$$C = \frac{Q}{\varepsilon} f^2,$$

y la ecuacion se reduce á

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{Q}{\varepsilon}\left(f^2 - y^2\right).$$

De ella se saca el valor

$$dx = \frac{dy}{-\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}\left(f^2 - y^2\right)}},$$

con el radical negativo porque la concavidad de la curva ha de estar vuelta al orígen. La integral es

$$x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}\ \text{arc. cos.}\ \frac{y}{f} + A$$

ó sea .... $y = f \cos. \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\,(x - A)$ (52)

ecuacion en la que quedan que determinar la constante A y la distancia f, para lo cual se dispone de las condiciones de posicion de los estremos de los prismas y de los pesos.

107 La ecuacion última, comun en esta forma á todos los casos de flexion de prismas verticales, pertenece á la curva trascendente llamada sinusoide; cuya forma es la de la figura 54. Esta curva es periódica é indefi-

nida, corta al eje en los puntos a, b, c, d, A en que $(x - A)\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ es igual á un número impar de cuadrantes, ó siendo n un número entero cualquiera, en donde sea

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}} + A,$$

en cuyos puntos presenta una inflexion ó sea curvatura nula, y en los intermedios e, f, g, h, en que $(x - A)\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ es igual á un número par de cuadrantes, ó

$$x = n\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}} + A$$

adquiere la ordenada y su mayor valor, que es $y = f$, teniendo todos los puntos correspondientes de un mismo lado, i, j, k, ó l, m, una tangente comun iT, ó lT' paralela al eje; y la curva tiene su mayor curvatura.

108. Las formas de la flexion de un prisma vertical serán los arcos de esta curva que satisfagan á las condiciones á que se halla sujeto, correspondiendo siempre los puntos de inflexion á la vertical del peso Q, lo que demuestra tambien la ecuacion (55), por que para $M = 0$ dá $\rho = \infty$. Si el prisma está empotrado en su estremo inferior, los arcos han de empezar en un punto de máxima

ordenada i, porque en ellos es únicamente vertical la tangente; pero si está simplemente apoyado en un plano horizontal, la curva deberá empezar por uno de los puntos de inflexion como l ó a para que la vertical del peso pase por el punto de apoyo. El término ó estremo opuesto de la curva se determina por el modo con que se halla unido el peso á la pieza: si se ha suspendido directamente de la estremidad, debe corresponder á otro punto de inflexion b ó c de la curva; si se ha mantenido á cierta distancia, como en la figura 42, corresponde el final de la curva á los puntos de interseccion con una vertical $O'A'$ distante del eje una cantidad $OO'=BC$. Finalmente las condiciones enunciadas se satisfacen lo mismo con uno que con varios de los arcos periódicos de la curva.

109. Segun lo que precede, en el caso en que una pieza empotrada en el estremo inferior, tenga libre el superior y colocado un peso á cierta distancia, la forma de la elástica podrá ser la de la figura 42, ó la de las figu-

ras 43 y 44 correspondientes á los arcos de sinusoide in, $inlo$, ó $iljp$. Si el estremo superior ha de quedar en la misma vertical que el inferior, no podrá menos de tener la tangente vertical, porque todos los puntos que estén en la vertical de i la tienen por tangente; y los arcos serán ilj, ó $iljmk$, con la precisa condicion de que el peso ha de distar del estremo del prisma una cantidad igual á la mayor ordenada $Oi=f$ para que caiga sobre los puntos de inflexion; resultando las elásticas de las figuras 45 y 46. Mas si el peso se colocase en la misma estremidad, la flexion seria imposible, á no ser que se pusiese libre dicha estremidad, en cuyo caso la elástica tendria la forma de las figuras 47 ó 48, correspondientes á los arcos ia, ó $ialb$. Si sujetas ambas estremidades en la misma vertical, la inferior está simplemente apoyada en el suelo, el prisma tomaria las formas de las figuras 49, 50 y 51, que corresponden á los arcos alb, $albjc$, ó $albjcmd$ de la curva tipo.

110. En todos estos casos, las formas periódicas se deben considerar como inestables, y que tienden á tomar la forma mas sencilla que en cada uno corresponda, por que á poco que se aparte el peso Q (fig.ª 43) de su posicion hácia la derecha, su brazo de palanca tiende á aumentar, y seguirá aumentando hasta que llegue al máximo en la posicion puntuada, al mismo tiempo que la resistencia á la flexion será menor en el punto A cuantos menos dobleces tenga la pieza en la misma estension. Asi es que cuando se quieran producir estas formas es menester fijar de algun modo la posicion de los puntos de inflexion segun la distribucion que deban tener en la estension de la pieza.

111. La determinacion de la flecha f depende de las condiciones á que el prisma se halla sujeto. En el caso de la figura 42, la ecuacion general (52) dá, haciendo $OC=OB=a$, $CB=l$, las dos condiciones

en el punto A, $x=0$, $y=f$, y $A=0$

en el punto B, $x=a$, $y=l$, y $l=f\cos. a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$

de donde se deduce

$$f=\frac{l}{\cos. a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}$$

y la ecuacion de la curva es

$$y=l\,\frac{\cos. x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos. a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}$$

que puede representar las curvas de las figuras 42, 43 ó 44, segun sea 0, 1, 2, &c el número de veces que la cantidad $a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ contenga á la longitud π de la semicircunferencia con arreglo á la unidad de medida que se haya adoptado.

Mas en el caso de la figura 47 y siguientes, en que para $x=a$, $y=0$, la flecha queda indeterminada, y en cambio no hay mas que una constante que determinar con las dos condiciones relativas á las estremidades. Esta anomalía proviene de las cantidades que se han despreciado al integrar la ecuacion primitiva (51), y para corregirla es menester seguir otro procedimiento de integracion.

112. Haciendo $\frac{dy}{dx}=p$, la ecuacion de equilibrio (51) aplicada al caso de la figura

47 toma la forma

$$\varepsilon \frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -Q y,$$

y multiplicando ambos miembros por $2dy$, y haciendo $\frac{Q}{\varepsilon} = 4\alpha^2$, queda, teniendo presente que $dp^2 = 2p\,dp$,

$$\frac{dp^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -4\alpha^2 dy^2,$$

cuya ecuacion, teniendo presente que para $y=f$ es $p=0$, dá la integral

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 1 - 2\alpha^2(f^2-y^2):$$

de ella se deduce

$$p = \frac{dy}{dx} = -2\alpha \frac{\sqrt{(f^2-y^2)[1-\alpha^2(f^2-y^2)]}}{1-2\alpha^2(f^2-y^2)}$$

con el signo negativo en el radical, por que la tangente forma un ángulo obtuso con el eje positivo de abscisas.

El elemento de arco de la curva AB se espresa por la fórmula

$$ds = -\frac{dy}{2\alpha\sqrt{(f^2-y^2)[1-\alpha^2(f^2-y^2)]}};$$

y haciendo para simplificar $y = f \operatorname{sen} t$, resulta

$$2\alpha ds = \frac{-dt}{\sqrt{1-\alpha^2 f^2 \cos^2 t}};$$

cuya espresion desarrollada en serie es

$$-2\alpha ds = dt\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2 f^2\cos^2 t+\frac{3}{8}\alpha^4 f^4\cos^4 t+\frac{5}{16}\alpha^6 f^6\cos^6 t+\cdots\right);$$

y la integral, tomada desde $y=f$ y $t=\frac{1}{2}\pi$ hasta $y=0$ y $t=0$, es

$$2\alpha a = \frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2 f^2+\frac{9}{64}\alpha^4 f^4+\cdots\right).$$

porque la longitud de la curva se confunde sensiblemente con su proyeccion.

La cantidad αf es tan pequeña, que con un error despreciable se puede escribir

$$2\alpha a = \frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2 f^2\right),$$

de donde se deduce, sustituyendo el valor de α

$$f = 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}\sqrt{\frac{2a}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}-1}.$$

La figura 49 se puede considerar como compuesta de dos mitades iguales á las de la figura 47, y cuya longitud sea $\frac{1}{2}a$; siendo la flecha

$$f = 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}-1}.$$

113. El punto de rotura es aquel que tiene mayor ordenada, porque es el de mas curvatura de la sinusoide (107), y la ecuacion de resistencia es en general

$$R = \frac{Q}{\omega}+\frac{v'Qf}{I} = Q\left(\frac{1}{\omega}+\frac{v'f}{I}\right).$$

Para una pieza como la de la figura 42, esta ecuacion dá (111)

$$R = Q\left(\frac{1}{w} + \frac{v'l}{I\cos.a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}\right);$$

pero para piezas cargadas en su estremidad, como las de las figuras 47 y siguientes, no se puede aplicar esta ecuacion mientras no sea

$Q > \frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}$ ...... en las figuras 47 y 48,

ó $Q > \frac{\pi^2\varepsilon}{a^2}$ ...... en las figuras 49, 50 y 51,

porque para valores inferiores la flecha es imaginaria, y por consiguiente no hay flexion posible, y en tal caso, no produciendo el peso mas que una compresion, las dimensiones de la pieza se calculan por la ecuacion sencilla

$$R = \frac{Q}{w}.$$

111. El peso cuyo valor es

$$Q = \frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2} \text{ ------- } (53)$$

no se puede aplicar con seguridad á una pieza como la de la figura 47 mientras no sea inferior al límite de las cargas de compresion directa Rw, para lo cuales preciso que la pieza pase de cierta longitud. En efecto, si se toman sobre un eje OA (figura 52) magnitudes como Oa pro-

porcionales á la longitud de las piezas, suponiendo que son las mismas la seccion trasversal y la materia de que están formadas, y perpendicularmente se toman magnitudes aq proporcionales á $\frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}$, se formará la curva CqB, cuyas ordenadas son el peso Q que es capaz de iniciar la flexion; y tomando una longitud $Or = Rw$, y trazando la recta rr' paralela á OA, el pié de la perpendicular $r'b$ marcará la longitud Ob mas pequeña de las piezas que pueda resistir el peso $\frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}$ que empieza á doblarlas. Si la pieza es de seccion circular, siendo su diámetro d, esta longitud está dada por la ecuacion

$$\frac{\pi^2 d^2}{64a^2} = \frac{R}{E},$$

de la que resulta

para la madera ... $\frac{a}{d} = 16,03$

para el hierro dulce ... $\frac{a}{d} = 22,60$

para el hierro fundido ... $\frac{a}{d} = 24,85$.

Si la seccion es rectangular y c el lado menor de la seccion, la ecuacion es

$$\frac{\pi^2 c^2}{48a^2} = \frac{R}{E},$$

que dá

para la madera .... $\frac{a}{c} = 18,51.$

para el hierro dulce ... $\frac{a}{c} = 26,10$

para el hierro fundido... $\frac{a}{c} = 28,69.$

Para piezas como la de la figura 49. estos límites se han de duplicar, segun el modo que se ha tenido de considerar las (112)

Siempre que la longitud comparada con la menor dimension de la base sea menor que estos números, la resistencia se debe calcular por la fórmula (1) de la leccion 1.ª; y siempre que sea mayor por las fórmulas de esta leccion. Pero en las longitudes que se usan en la práctica, apenas se puede pasar de la carga que indica la curva rB sin riesgo inminente de que se altere la elasticidad.

115. Para que las fórmulas precedentes sean exactas en la práctica es de todo punto indispensable que la presion Q se ejerza en el mismo eje del prisma, porque á nada que se desvie de él su punto de aplicacion, tiene lugar la resistencia como en la figura 42, y por pequeña

que sea la distancia C con relacion al lado menor de la base, el peso Q tiene que ser mucho menor que el que indican las fórmulas (13) y (1), representadas en la figura 52.

Las reglas de Rondelet para los postes de madera y los experimentos y fórmulas empíricas de Hodghinson para las columnas de madera y de hierro están perfectamente de acuerdo con toda esta teoría, é indican que la fórmula (13) se puede aplicar cuando terminadas las columnas por placas ó ensanches que reciban la presion, no puede esta sufrir desvío sensible; y que en caso contrario, se deberá suponer aplicada en las aristas del sólido, ó por lo menos al tercio ó al cuarto de la mitad del espesor de la pieza.

116. Cuando sujetando ciertos puntos de la pieza se obliga á la elástica á que sea una curva múltiple (110), la resistencia de la pieza es mayor, porque cada una de las divisiones ó periodos se dobla como si estuviese solo sometida al peso Q, y esta crece en sentido contrario de la longitud. En el caso en que se pueda aplicar la fórmula (13) la

resistencia aumenta como el cuadrado del número de divisiones, de modo que con solo fijar un punto en las piezas de las figuras 47 á 49, se cuadruplica su resistencia.

117. La ecuación de la elástica de una pieza sujeta por el estremo superior A (figura 53) y de la que se suspende un peso Q á una distancia $BC = l$ de su estremo inferior, se obtiene cambiando el signo á Q en la ecuación del prisma de la figura 42. Dicha ecuación se transforma en esta otra

$$y = f \cos \sqrt{-\frac{Q}{\varepsilon}}\,(x - A),$$

que debiendo dar, para $x = 0$, $y = f$, y para $x = a$, $y = l$, se reduce á

$$y = l\,\frac{\cos x\sqrt{-\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos a\sqrt{-\frac{Q}{\varepsilon}}},$$

y como

$$\cos m\sqrt{-1} = \frac{e^{m} + e^{-m}}{2},$$

la ecuación se reduce á

$$y = l\,\frac{e^{x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} + e^{-x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}$$

El punto de máxima curvatura es el estremo B, y en él se habrá de verificar la ecuación $R = Q\left(\frac{1}{\omega} + \frac{v'l}{I}\right)$

Leccion 8ª

Equilibrio y resistencia de prismas inclinados.

118. Sea AB (figura 55) una pieza empotrada en A y encorvada desde su posición primitiva Ab por la acción de un peso Q que actúa á una distancia $BC = l$ de la estremidad B. Tomando para ejes de coordenadas las rectas Ox, dirección del peso, y Oy, perpendicular á Ab en el punto A, y llamando m y n el coseno y seno del ángulo AcO, que forma con el eje de absisas la dirección primitiva del eje del prisma, la ecuación de equilibrio para un punto cualquiera, cuyas coordenadas son $Oe = x$, $ea = y$, que es

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = Q \times ad,$$

tomará la forma

$$\varepsilon\,\frac{d^2y}{(m\,dx)^2} = -\,mQy,$$

que es análoga á la de la lección anterior, y

su primera integral es, haciendo $\frac{m^3 Q}{\varepsilon} = q^2$ y $OA = f'$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2 + q^2(f'^2 - y^2),$$

porque en el punto A debe ser $\frac{dy}{dx} = n$.

Representando por B una constante arbitraria, la integral de esta ecuación es

$$qx = qB + \text{arc. cos.} \frac{qy}{\sqrt{f'^2 q^2 + n^2}},$$

ó despejando la ordenada

$$qy = \sqrt{q^2 f'^2 + n^2} \cos q(x - B)$$

que es la ecuación de una sinusoide trazada sobre los ejes oblicuos OC, OA.

119. Las posiciones de los puntos A y B respecto de la dirección del peso determinan las constantes f' y B. Debiendo ser en el punto A, $x = 0$, $y = f'$, se obtiene

$$\text{sen } qB = \frac{-n}{\sqrt{q^2 f'^2 + n^2}}, \quad \cos. qB = \frac{qf'}{\sqrt{q^2 f'^2 + n^2}},$$

y la ecuación toma la forma

$$qy = qf' \cos qx - n \text{ sen. } qx;$$

y como en el punto B haciendo $OC = a'$, son $x = a'$, $y = l$, resulta

$$qf' = \frac{ql + n \text{ sen. } qa'}{\cos. qa'}$$

y por fin la ecuación es

$$y = \frac{ql \cos. qx + n \text{ sen. } q(a' - x)}{q \cos. qa'}$$

De estos valores se puede deducir la distancia $bC = f$, que es

$$f = bC = AD = AO - DO = f' - na' = \frac{l}{\cos qa'} + \frac{n}{q}(\text{tang. } qa' - qa'),$$

la cual en el caso en que el peso esté aplicado al punto B se reduce á

$$f = Bb = \frac{n}{q}(\text{tang. } qa' - qa').$$

120. La ecuación anterior hace ver que cuando el ángulo ACO sea bastante grande para que la quinta potencia del producto qa' sea despreciable comparada con la unidad; lo cual acontece frecuentemente en las aplicaciones prácticas, el efecto que produce el peso Q es la suma del que producirían sus componentes $m \times Q$, $n \times Q$ separadamente. En efecto, dicha ecuación se puede descomponer en dos sumandos

$$y' = l \frac{\cos. qx}{\cos. qa'}, \quad y'' = \frac{n \text{ sen. } q(a' - x)}{q \cos. qa'},$$

siendo $y = y' + y''$: el primero representa la elástica de una pieza recta cargada paralelamente á la dirección de su eje (111) como la de la

figura 42, pues haciendo $m \times x = Dg = x'$, $m \times a' = Ab = a$, y $m \times Q = Q'$, se convierte en la ecuacion

$$y' = l \frac{\cos x' \sqrt{\frac{Q'}{\varepsilon}}}{\cos a \sqrt{\frac{Q'}{\varepsilon}}} :$$

el segundo sumando representa una curva muy aproximada á la de la figura 27, por que desarrollando el seno y el coseno hasta su segundo término, resulta

$$y'' = n(a'-x) + \frac{1}{6} n q^2 (2a'^3 - 3a'x^2 + x^3),$$

en donde, haciendo $nQ = P$, queda

$$y'' = n(a'-x) + \frac{Pa^3}{3\varepsilon} - \frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} a x'^2 - \frac{1}{6} x'^3\right),$$

ecuacion en la cual el primer término representa la ordenada eg de la recta CD, el segundo término la flecha que el punto B tomaria por la accion sola de la fuerza $n \times Q = P$, y el tercero es la ecuacion de la curva de la figura 27 referida al eje primitivo de la figura (82). Esto indica, que si como suele suceder, el peso está aplicado al mismo punto B, la componente de Q paralela al prisma no tiene influencia sensible sobre la flexion y curvatura de este, y no produce mas que compresion directa porque siendo $l = 0$, y' es cero é $y = y''$. Pero siempre

es indispensable que el ángulo DCO no sea muy agudo á fin de que la fraccion m sea bastante pequeña.

121. El punto de rotura es el A en que el momento es mayor, é igual á mQf. La ecuacion de la resistencia será

$$R = \frac{mQ}{\omega} + \frac{v' m Q f'}{I},$$

cuya ecuacion, cuando el producto qa' sea bastante pequeño para que la componente mQ no influya en la curvatura de ningun punto, y por consiguiente en la del A, se reduce á

$$R = \frac{mQ}{\omega} + \frac{v' n Q a}{I}.$$

que es la que se usa en casi todas las aplicaciones; ó haciendo $mQ = Q'$; $nQ = P$

$$R = \frac{Q'}{\omega} + \frac{v' P a}{I}$$

122. Si el prisma inclinado está sujeto por el estremo superior (figura 56), la ecuacion de la elástica será la misma variando el signo de Q: atendiendo á que

$$\cos n\sqrt{-1} = \frac{e^{n} + e^{-n}}{2}, \quad \text{sen.}\, n\sqrt{-1} = \frac{e^{n} - e^{-n}}{2}\sqrt{-1},$$

resultará

$$y = l \frac{e^{qx} + e^{-qx}}{e^{qa'} + e^{-qa'}} + \frac{n}{q} \frac{e^{q(a'-x)} - e^{-q(a'-x)}}{e^{qa'} + e^{-qa'}},$$

ecuacion que se reduce igualmente á la suma de los que corresponden á las figuras 53 y 27 cuando el ángulo AcO es bastante grande para que se pueda despreciar la quinta potencia de qa'.

123. El punto de rotura es por lo comun el punto A, aunque pudiera ser tan grande el valor de l comparado con el de n que fuera el punto B como en la figura 53; y cuando $l=0$ la ecuacion de la resistencia es la misma que antes (121) con la diferencia de que v' corresponde á la parte convexa del prisma en lugar de la cóncava.

124. Cuando haya fuerzas uniformemente repartidas en la longitud del prisma, se descompondrán en direcciones perpendicular y paralela á esta, considerando que solo las primeras componentes producen la flexion y que las últimas no hacen mas que dilatar ó comprimir uniformemente todas las fibras; lo cual segun lo que se acaba de decir (120 y 122) será suficientemente exacto para las aplicaciones ordinarias.

125. Una pieza inclinada AB (fig.ª 57)

apoyada en sus dos estremidades A,B en apoyos horizontales, y cargada del peso P en un punto intermedio C, puede considerarse como compuesta de dos partes fijas en el punto C, y en cuyos estremos A,B obran fuerzas verticales Q,Q' cuya intensidad será, llamando a y a' las longitudes AC, BC

$$Q=P\frac{a'}{a+a'}\ ,\qquad Q'=P\frac{a}{a+a'}$$

y el equilibrio de cada parte CB ó AC será igual respectivamente al de los prismas estudiados antes (118 y 122). En el caso de la figura 58, en que apoyado el prisma en un punto C, se halle solicitado en sus estremidades, es preciso que los pesos P y P' se equilibren, y cada una de las partes de la pieza se halla como las inversas de la anterior.

126. Si la pieza se halla apoyada en la parte superior contra un plano vertical y en la inferior en el encuentro de dos, uno horizontal y otro vertical (figura 59); el peso P producirá tres reacciones, una Q horizontal en B, y en A una Q' horizontal

y otra P' vertical, cuyas intensidades se deducen de las ecuaciónes de equilibrio

$$P' = P$$

$$Q' = Q$$

$$P'a \cos\alpha - Q'a \operatorname{sen}\alpha - Q\,a' \operatorname{sen}\alpha = 0$$

siéndo α el ángulo de AB con la horizontal; de donde resulta

$$Q = \frac{Pa}{(a+a')\operatorname{tang}\alpha}$$

y las ecuaciónes de equilibrio de cada parte de esta pieza son como las del prisma de la figura 54, considerando á la parte BC como empotrada en C y sugeta en el estremo B á la fuerza Q; y á la parte CA como empotrada en C, sujéta á las condiciónes de coincidencia y continuidad con la otra parte, y á la accion de una fuerza S que actúa en el estremo A. Esta fuerza S, resultante de P' y Q' debe cortarse en el punto D con la direccion de la fuerza Q y el peso P, cuya propiedad puede servir para deducirla por una construccion gráfica muy sencilla.

127. Si una pieza recta horizontal, que ha de sostener un peso 2P en el medio, se dobla

ligeramente y se coloca entre dos apoyos fijos B, B' (figura 60) de modo que haya de quedar con una pequeña flecha de peralte ó bombeo AD, tiene mas resistencia que si se dejase simplemente apoyada por sus dos estremos, y el cálculo de sus dimensiónes se refiere al de los prismas inclinados, por que cada apoyo B origina una reaccion horizontal Q' por la tendencia que tiene la pieza á tomar su longitud primitiva, fuerza que compuesta con la reaccion vertical P' igual y contraria á P produce la resultante Q dirigida oblicuamente respecto de la tangente horizontal con el punto A, en el que se puede considerar como empotrada la mitad AB.

Suponiéndo conocidas la magnitud y direccion de la fuerza Q, y prolongándola hasta O, se tomarán como siempre para ejes de coordenadas las rectas OB y OA, con lo cual la ecuacion de la curva BCA será (119) conservando siempre las mismas denominaciónes,

$$y = \frac{n \cdot \operatorname{sen} q(a' - x)}{q \cos q a'}.$$

Llamando f á la flecha de bombeo AD, se tiene

$$f = CD - OA = na' - f' = \frac{n}{q}\,(qa' - \text{tang.}\, qa');$$

de cuyo valor se puede eliminar n atendiendo á que

$$n = \text{sen.}\, OBD = \frac{P}{Q} = \frac{p^2}{q^2},$$

si se hace para simplificar $p^2 = \frac{m^3 P}{\varepsilon}$; quedando esta ecuacion en la forma

$$f = \frac{p^2}{q^3}\,(qa' - \text{tang.}\, qa'),$$

en la cual no hay mas cantidad indeterminada que q y se puede conocer por tanteos cuando se dé f.

128. Es evidente que estando dirigida la nueva fuerza Q' en sentido contrario que la P respecto del punto A, ha de disminuir el momento Pa en la cantidad $Q'f$, aumentando en otro tanto su resistencia, pero ese aumento no es indefinido, y tiene un máximo que conviene fijar.

Cuando la flecha AD no sea muy grande, tampoco lo será la reaccion Q', y la direccion de la resultante Q cortará al eje de ordenadas por encima del punto A, y la curva elástica tendrá que presentar una in-

flexion en C, donde corta á la direccion de Q, por que allí su momento es nulo y cambia de signo. En este caso, habrá dos puntos de rotura de la pieza, uno en la rama CA y otro en la CB, en los puntos en que y tenga el mayor valor numérico, que por la ecuacion de la curva (127) será cuando

$$\text{sen}\, q\,(a' - x) = \pm 1$$

condicion que queda satisfecha siendo

$$x = a' - \frac{\pi}{2q}$$

para la parte CB, valor que corresponde á un punto E, cuya abscisa OF es la semisuma de OC y OB. En la parte CA el punto de rotura es el A, en que $x = 0$, porque el valor máximo de la ordenada corresponderia á un punto situado mas allá de la vertical OD, en que la tangente á la curva fuese paralela á OB. El momento respecto del punto E es

$$M = \frac{mnQ}{q \cos. qa'}$$

y respecto del punto A es

$$M = \frac{mnQ\, \text{sen.}\, qa'}{q \cos qa'},$$

y como el seno siempre es menor que la unidad, el segundo momento es siempre

menor que el primero, y el verdadero punto de rotura es el E. Multiplicando ambos términos por a′ y haciendo $BD=a$, se tiene

$$ma'=a, \qquad nQ=P';$$

y representando el producto qa' por α el momento toma la forma

$$M=\frac{P'a}{\alpha \cos.\alpha}$$

el cual, para que la pieza se halle en condiciones ventajosas, ha de ser menor que $P'a$, que es el que la solicitaria si estuviese apoyada libremente por sus estremos. Esta condicion exige que

$$\alpha \cos.\alpha > 1$$

ó que

$$\alpha > \sec.\alpha,$$

lo cual tiene lugar para todos los arcos comprendidos desde el punto F (figura 61) en que $ABF=4,4877$, hasta el punto C, en que $ABC=2,0739$, siendo el radio la unidad. Segun esto, la flecha de bombeo habrá de comprenderse entre los límites

$$f>0,00125\,p^2a'^3 \quad y \quad f<0,43615\,p^2a'^3.$$

Entre todas las flechas admisibles, la

mas ventajosa es la que hace un mínimo al momento M; la cual se obtiene sustituyendo el valor de qa' ó α que hace un máximo la espresion $\alpha \cos\alpha$, y es

$$\alpha = \text{cotang.}\,\alpha.$$

El arco ABE que satisface á esta condicion, comprendido entre los arcos ABC y ABF tiene de longitud 3,4246, y la flecha de bombeo que corresponde á este valor es

$$f=0,0780\,p^2a'^3.$$

129. Poniendo en lugar de p su valor (127) y reemplazando a' por $\frac{a}{m}$, se tiene

$$p^2a'^3=\frac{Pa^3}{\varepsilon},$$

y llamando $\mathfrak{a}$ á la flecha que tomaria la pieza BB′ (figura 60) bajo la accion del peso 2P, si se hallase apoyada libremente por sus estremos, se tendrá (82)

$$p^2a'^3=3\,\mathfrak{a},$$

con lo cual los límites de la flecha serán

$$f>0,00375\,\mathfrak{a} \quad y \quad f<1,3084\,\mathfrak{a}$$

y la flecha mas ventajosa

$$f=0,2340\,\mathfrak{a}$$

ó próximamente $\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}$.

Mientras $q\,a'$ esté comprendido entre ABD y ABF (figura 61), la elástica tiene un punto de inflexion en cada rama y tres puntos de máxima curvatura, uno en E, otro en E' y el tercero en A; pero si $q\,a' = \pi$, los dos puntos de inflexion se reunen en A (figura 62) y la pieza ofrece la curvatura en el mismo sentido; y si $q\,a'$ está comprendido entre ABC y ABD (figura 61), la elástica no tiene punto alguno de inflexion en toda su longitud (figura 63).

Leccion 9.ª

Equilibrio y resistencia de las piezas curvas.

130. El estudio de la elasticidad de las piezas curvas se limitará al caso en que la figura primitiva de su eje es plana, y la flexion se verifica en su mismo plano, para lo cual es preciso que las fuerzas que solicitan á la pieza se hallen en ese plano, y que la seccion trasversal esté dispuesta de tal modo, que tambien se halle en ese plano uno de los ejes principales de inercia de su figura correspondientes al centro de gravedad (61). La ecuacion (7) espresa entonces la variacion de los ángulos de las secciones inmediatas, que ha producido la accion de las fuerzas estoriores.

131. No es tan fácil hallar la ecuacion de la elástica en este caso como en los anteriores; tanto por no poder simplificar

la ecuación (7) del mismo modo, como porque las variaciones de longitud de los elementos, causadas por las fuerzas que se han trasladado al centro de gravedad de cada seccion, son diferentes para cada punto é influyen por consiguiente en la curvatura general. Por esto, en lugar de buscar una ecuación que contenga la abscisa y la ordenada de cada punto de la elástica, se calcula por separado la variación que han tenido las dos coordenadas de cada punto de la curva primitiva. Sea AB (figura 64) la curva primitiva, que bajo la accion de una fuerza F se ha convertido en la elástica $A'B'$, tomando dos puntos m,n infinitamente próximos las posiciones m',n'. La variación pp' de la abscisa del punto m se podrá hallar sumando las variaciones parciales $p'q' - pq$ de todos los elementos separadamente, desde el estremo A hasta el punto m, y lo mismo la variación de la ordenada. Cada variación elemental se compone de dos partes: la primera debida al giro del elemen-

to mn, que formaba con el eje de la x un ángulo α (62) á la posicion $m'n'$ que forma con la misma línea el ángulo α', cuyo movimiento es causado por el par que resulta de trasladar la fuerza F al punto n; y la segunda debida al aumento de longitud que ha ocasionado en el elemento mn la fuerza T, componente paralela á la tangente en m de la fuerza F trasladada como acaba de decirse.

132. Llevando la longitud mn desde m' hasta o, la parte on' será la variación de longitud producida por la componente T, cuya variación será (6)

$$on' = \frac{T}{E\omega}\, ds;$$

y el aumento ó disminucion que esta fuerza produzca en el elemento de abscisa ó en el de la ordenada será igual á la proyeccion de on' sobre el eje respectivo, que equivale á

$$\frac{T}{E\omega}\, dx, \quad ó \quad \frac{T}{E\omega}\, dy.$$

El efecto de cualquier otra causa de variacion de longitud se puede apreciar sustituyendo á $\frac{T}{E\omega}$ la variacion que corres-

ponda á la unidad.

133. Moviendo ahora la parte mo paralelamente á sí misma hasta que el punto m' se confunda con el m (figura 63), se vé que la variacion que el giro produce en el elemento mb de abscisa está representada por cn, y la del elemento bn de ordenada por co. La recta que une los puntos o y n, equidistantes de m, se puede considerar como normal á mn por la pequeñez del ángulo $nmo = \alpha' - \alpha$, y entonces, los triángulos semejantes mbn, nco, dan

$$cn = bn\,\frac{on}{mn}, \qquad co = mb\,\frac{on}{mn}$$

y como $\frac{on}{mn} = \alpha' - \alpha$, estas variaciones son

$$cn = (\alpha' - \alpha)\,dy \;;\quad co = (\alpha' - \alpha)\,dx.$$

134. De esto resulta, teniendo en cuenta que la direccion de cn es negativa, que la variacion elemental de las coordenadas es

$$dx' - dx = -(\alpha' - \alpha)\,dy + \frac{T}{E\omega}\,dx\;;\quad dy' - dy = (\alpha' - \alpha)\,dx + \frac{T}{E\omega}\,dy$$

llamando x' é y' á las coordenadas de la elástica, cuyas ecuaciones, junto con la (7)

resuelven por completo el problema propuesto. Llamando x_0 á la abscisa del punto A (figura 64) y suponiendo que todas las cantidades se espresan en funcion de x, las integrales de estas ecuaciones son

$$\alpha' - \alpha = A + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{\varepsilon}\,ds, \qquad (14)$$

$$x' - x = B - \int_{x_0}^{x} (\alpha' - \alpha)\,dy + \int_{x_0}^{x} \frac{T}{E\omega}\,dx, \qquad (15)$$

$$y' - y = C + \int_{x_0}^{x} (\alpha' - \alpha)\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{T}{E\omega}\,dy. \qquad (16)$$

Las constantes A, B y C representan las variaciones de posicion y direccion del elemento que corresponde al punto A, desde el que se empiezan á hacer las integraciones: designando por x_0, y_0, α_0 el valor de las variables en el punto A, y por x'_0, y'_0, α'_0 el de las mismas en el punto A', dichas constantes tienen las espresiones siguientes:

$$A = \alpha'_0 - \alpha_0$$
$$B = x'_0 - x_0$$
$$C = y'_0 - y_0.$$

Si el punto A está fijo, B y C son cero, y si ademas está empotrada la pieza en él tam-

bién A es igual á cero.

135. Si se fijan la posicion ó la direccion de algunos de los elementos de la pieza curva, se originarán reacciones equivalentes á fuerzas ó á pares, lo mismo que en las piezas rectas. Las ecuaciones de equilibrio de los sistemas rígidos no pueden determinar mas que dos de estas reacciones, y las restantes introducidas como incógnitas en las ecuaciones anteriores, se determinan por las condiciones dadas para sus puntos de aplicacion, como se hacia en las piezas rectas. Si el punto considerado solo está sujeto á permanecer sobre cierta linea dada, la eliminacion de x' é y' entre las ecuaciones de esta curva y las (15) y (16) dará la intensidad de la reaccion normal á la curva; si el punto ha de estar fijo, las dos componentes de la reaccion se hallarán haciendo $x'=x$ é $y'=y$ para ese punto en las mismas ecuaciones (15) y (16); y si la direccion de un elemento de curva es fija é invariable, el momento del par que resulta lo da la ecuacion (14) en que se haga $\alpha'=\alpha$ para aquel punto.

136. Las cantidades M y T son funciones lineales y sin término constante de todas las fuerzas continuas ó discontinuas que soliciten al sólido desde el punto m hasta la estremidad libre B: por consiguiente, el segundo miembro de cada una de las ecuaciones (14), (15) y (16) equivale á la suma de los valores que tomaria la funcion que lo representa si se sustituyen en ella las cantidades M ó T que corresponden á cada fuerza aislada. De aqui se deduce que las desviaciones de cada punto, causadas por un conjunto cualquiera de fuerzas, equivale á la suma de las que cada fuerza produciria separadamente si actuase sola en la pieza; y del mismo modo, las reacciones que producen los obstáculos fijos (135) equivalen á la resultante de las que cada fuerza produciria por separado. Esta propiedad simplifica mucho las investigaciones relativas á la resistencia de las piezas curvas.

137. Antes de resolver ningun ejemplo particular, se observará, que siempre que la figura del eje de una pieza sea la de la cur-

va funicular que corresponde á la distribucion de fuerzas de que esté cargada, no hay flexion ninguna, porque por las propiedades de estas curvas, la resultante de todas las fuerzas que actuan desde la estremidad libre hasta un punto cualquiera de su longitud pasa por este punto, pues es la tension del elemento que le corresponde, y por consiguiente el momento M es cero en toda la estension de la pieza y $\alpha' = \alpha$. Estas piezas sufren solo una compresion, y la figura de su eje se llama curva de equilibrio. La forma de equilibrio para pesos repartidos uniformemente sobre la longitud de la pieza es la cadenaria, para pesos repartidos uniformemente segun una linea horizontal es la parábola, y para fuerzas normales á la pieza, el radio de curvatura del eje está en razon inversa de la presion que corresponde á cada punto, siendo la compresion longitudinal constante, cuya propiedad corresponde al círculo cuando la presion es uniforme en toda la estension de la curva.

138. Los arcos circulares son los unicos que

ocurre en la práctica calcular.

Sea ABC (figura 66) el eje de una pieza circular, empotrada en un plano vertical Ay que pasa por el centro O, y cargada con un peso P en un punto B. Haciendo

$OA = OB = \rho$, $AOm = \alpha$, $AOB = \theta$, $AOC = \Phi$, $Ap = x$, $pm = y$, $Am = s$,

se tendrá

$$x = \rho\, \text{sen.}\, \alpha, \quad y = \rho\,(1 - \cos.\, \alpha), \quad s = \rho\, \alpha:$$

La flexion de las dos partes AB, BC, se habrá de considerar separadamente, y en la estension de la primera serán

$$M = P \times pq = P\rho\,(\text{sen.}\, \theta - \text{sen.}\, \alpha), \quad T = P\, \text{sen.}\, \alpha,$$

y como las constantes x_0, A, B y C son cero porque el origen de coordenadas está en el estremo A, fijo en posicion y direccion, las ecuaciones (14), (15) y (16) toman la forma

$$\alpha' - \alpha = \frac{P}{\varepsilon}\rho^2(\alpha\, \text{sen.}\, \theta + \cos.\, \alpha - 1);$$

$$x' - x = \frac{-P}{\varepsilon}\rho^3\left[\text{sen.}\,\theta\,(\text{sen.}\,\alpha - \alpha\cos.\,\alpha) + \frac{1}{2}\text{sen.}^2\alpha + \cos.\,\alpha - 1\right] + \frac{1}{2}\frac{P}{E\omega}\rho\,\text{sen.}^2\alpha;$$

$$y' - y = \frac{P}{\varepsilon}\rho^3\left[\text{sen.}\,\theta\,(\alpha\,\text{sen.}\,\alpha + \cos.\,\alpha - 1) + \frac{1}{2}\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha + \frac{1}{2}\alpha - \text{sen.}\,\alpha\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{P}{E\omega}\rho\left[-\text{sen.}\,\alpha\cos.\,\alpha + \alpha\right].$$

Llamando θ' al valor de α' en el punto B, en que $\alpha = \theta$, y h y f á las proyecciones de

la desviacion del mismo punto sobre los ejes, se tendrá

$$\theta'-\theta = \frac{P}{\varepsilon}\rho^2(\theta\,\text{sen.}\,\theta + \cos.\theta - 1)$$

$$h = -\frac{P}{\varepsilon}\rho^3\left(\frac{3}{2}\,\text{sen.}^2\theta - \theta\,\text{sen.}\,\theta\cos.\theta + \cos.\theta - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{P}{E\omega}\rho\,\text{sen.}^2\theta,$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\rho^3\left(\theta\,\text{sen.}^2\theta + \frac{3}{2}\text{sen.}\,\theta\cos.\theta - 2\,\text{sen.}\,\theta + \frac{1}{2}\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{P}{E\omega}\rho(-\text{sen.}\,\theta\cos.\theta + \theta).$$

En la parte BC no actúa fuerza alguna directamente, por lo cual el giro de todas sus secciones es debido solo al de la primera, que corresponde al punto B, y se tendrá en toda la estension de dicha parte,

$$\alpha'-\alpha = \theta'-\theta,$$

$$x'-x = h - \rho(\theta'-\theta)(\cos.\theta - \cos.\alpha),$$

$$y'-y = f + \rho(\theta'-\theta)(\text{sen.}\,\alpha - \text{sen.}\,\theta);$$

y llamando Φ' al valor de α' en el punto C, y h', f' á las proyecciones de la desviacion del mismo punto, en que $\alpha = \Phi$, se tiene,

$$\Phi'-\Phi = \theta'-\theta,$$

$$h' = h - \rho(\theta'-\theta)(\cos.\theta - \cos.\Phi),$$

$$f' = f + \rho(\theta'-\theta)(\text{sen.}\,\Phi - \text{sen.}\,\theta).$$

139. Si el mismo arco está solicitado por una fuerza horizontal Q en el mismo punto B, se tendrá en la parte AB,

$$M = Q \times mr = Q(\cos.\alpha - \cos.\theta), \quad T = -Q\cos.\alpha,$$

y las ecuaciones serán

$$\alpha'-\alpha = \frac{Q}{\varepsilon}\rho^2(\text{sen.}\,\alpha - \alpha\cos.\theta),$$

$$x'-x = -\frac{Q}{\varepsilon}\rho^3\left[\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\text{sen.}\,\alpha\cos.\alpha - \cos.\theta(\text{sen.}\,\alpha - \alpha\cos.\alpha)\right] - \frac{1}{2}\frac{Q}{E\omega}\rho(\text{sen.}\,\alpha\cos.\alpha + \alpha),$$

$$y'-y = \frac{Q}{\varepsilon}\rho^3\left[\frac{1}{2}\text{sen.}^2\alpha - \cos.\theta(\alpha\,\text{sen.}\,\alpha + \cos.\alpha - 1)\right] - \frac{1}{2}\frac{Q}{E\omega}\rho\,\text{sen.}^2\alpha;$$

las que haciendo $\alpha = \theta$ dan

$$\theta'-\theta = \frac{Q}{\varepsilon}\rho^2(\text{sen.}\,\theta - \theta\cos.\theta),$$

$$h = -\frac{Q}{\varepsilon}\rho^3\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{3}{2}\text{sen.}\,\theta\cos.\theta + \theta\cos.^2\theta\right) - \frac{1}{2}\frac{Q}{E\omega}\rho(\text{sen.}\,\theta\cos.\theta + \theta),$$

$$f = \frac{Q}{\varepsilon}\rho^3\left(\frac{1}{2}\text{sen.}^2\theta - \theta\,\text{sen.}\,\theta\cos.\theta + \cos.^2\theta + \cos.\theta\right) - \frac{1}{2}\frac{Q}{E\omega}\rho\,\text{sen.}^2\theta.$$

En la parte BC las ecuaciónes son idénticas á las del párrafo anterior, debiéndo sustituir en ellas los valores de $(\theta'-\theta)$, h y f que se acaban de escribir.

140. Si el mismo arco con un peso P en el punto B, tiene el punto C sujeto á la condicion de permanecer siempre en la vertical ab (figura 67), se puede considerar como libre en este estremo y solicitado por una fuerza Q perpendicular á dicha linea ab. La intensidad de esta fuerza se determina por la condicion de que en el punto C sea $x'-x = 0$, valor que se obtendrá (136) sumando las espresiónes de h' que corresponden á la accion de la fuerza P (138) y de la reaccion Q (139), haciéndo en esta última $\theta = \Phi$. Resulta de ese modo, haciéndo las sustituciónes necesarias,

$$-\frac{P}{\varepsilon}\rho^3\left(\frac{3}{2}\,\text{sen.}^2\theta-\theta\,\text{sen.}\theta\cos\theta+\cos.\theta-1\right)+\frac{1}{2}\frac{P}{E\omega}\rho\,\text{sen.}^2\theta-\frac{P}{\varepsilon}\rho^3(\theta\,\text{sen.}\theta+\cos.\theta-1)(\cos.\theta-\cos\Phi)$$
$$+\frac{Q}{\varepsilon}\rho^3\left(\frac{1}{2}\Phi-\frac{3}{2}\,\text{sen.}\,\Phi\cos\Phi+\Phi\cos.^2\Phi\right)+\frac{1}{2}\frac{Q}{E\omega}\rho\,(\text{sen.}\,\Phi\cos.\,\Phi+\Phi)=0.$$

De aquí se deduce el valor del empuje

$$Q=P\,\frac{\frac{1}{2}\,\text{sen.}^2\theta-\cos\Phi(\theta\,\text{sen.}\,\theta+\cos.\theta-1)-\frac{1}{2}\alpha\,\text{sen.}^2\Phi\,\text{sen.}^2\theta}{\frac{1}{2}\Phi-\frac{3}{2}\,\text{sen.}\,\Phi\cos.\,\Phi+\Phi\cos.^2\Phi+\frac{1}{2}\alpha\,\text{sen.}^2\Phi(\text{sen.}\Phi\cos.\Phi+\Phi)},$$

representando por α la espresion $\frac{\varepsilon}{E\omega\rho^2\,\text{sen.}^2\Phi}$, que por lo comun es una fraccion muy pequeña.

141. Un arco circular simétrico (figura 68) cargado de dos pesos iguales en puntos B, B' equidistantes del medio A, y apoyado por sus estremidades C y C' de modo que estas no puedan separarse, se puede considerar como compuesto de dos mitades iguales, empotrada cada una en el punto A, cargada de un peso P en B, y solicitada en C por una fuerza vertical P' y otra horizontal Q que obliga á este punto á no salir de la vertical. La simetría de la figura determina el valor de P' igual á P, aunque dirigida en opuesto sentido, y el empuje Q se puede conocer entonces (136) sumando los valores de las reacciones contrarias que pueden originar las dos fuerzas verticales. Siendo θ la amplitud del arco AB, y Φ la del AC, resulta

$$Q_1=P\,\frac{\frac{1}{2}(\text{sen.}^2\Phi-\text{sen.}^2\theta)+\cos.\Phi(\theta\,\text{sen.}\theta+\cos.\theta-\Phi\,\text{sen.}\,\Phi-\cos.\Phi)-\frac{1}{2}\alpha\,\text{sen.}^2\Phi(\text{sen.}^2\Phi-\text{sen.}^2\theta)}{\frac{1}{2}\Phi-\frac{3}{2}\,\text{sen.}\,\Phi\cos.\,\Phi-\Phi\cos.^2\Phi+\frac{1}{2}\alpha\,\text{sen.}^2\Phi(\Phi+\text{sen.}\,\Phi\cos.\Phi)}$$

142. Cuando un arco simétrico (figura 69) está cargado de un peso P en un solo punto B el empuje Q que resulta, se calcula con suma sencillez por la consideracion siguiente. Si el mismo arco se hubiese cargado tan solo en otro punto B' (figura 70) con el mismo peso, el empuje ocasionado tendría cierta intensidad Q', y si al mismo tiempo se cargase en los puntos B y B', (figura 71) el empuje, que se representará ahora por Q_1 será igual á la suma de los anteriores Q y Q' (136): si el punto B' es el simétrico respecto del B, se tendrá evidentemente $Q=Q'$, y por consiguiente $Q_1=2Q$; y

$$Q=\frac{1}{2}\,Q_1,$$

teniendo Q_1 la espresion dada últimamente (141).

Se vé con facilidad que este valor del empuje Q se puede poner bajo la forma

$$Q=P\,\frac{A}{B}\cdot\frac{1-\kappa\alpha}{1+\varkappa\alpha},\quad\text{.......}\quad(57)$$

en la que A es una funcion de Φ y θ, B y

x' son funciones de Φ sola, y x es una funcion de Φ y θ, pero que se ha observado que es casi constante para cada valor de Φ. Mr. Bresse ha calculado una tabla que dá el valor del factor $\frac{A}{B}$ para cada valor de Φ y de θ, con lo que se puede conocer la parte principal del empuje, y otra tabla dá los valores de x' y el término medio de los de x para cada valor de Φ, con los cuales se puede averiguar la correccion que introduce en el valor del empuje la consideracion de la presion longitudinal T, correccion que es siempre pequeña por que lo es el valor de α.

143. Cuando haya pesos repartidos de una manera continua en cierta estension del arco, la fórmula (17) dará el empuje elemental que ocasiona cada peso infinitamente pequeño, sustituyendo la espresion de este en lugar de P, y el empuje total se hallará sumando ó integrando estas espresiones entre los límites de θ que correspondan á cada estremidad de la estension cargada. Si el peso está repartido uniformemente sobre la longitud del arco, siendo p el que car-

ga sobre la unidad de esta, se tendrá

$$Q = p\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{A}{B} \cdot \frac{1 - x\alpha}{1 + x'\alpha}\, d\theta\,;$$

y si está repartido proporcionalmente á las longitudes de la proyeccion horizontal, se tendrá

$$Q = p\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{A}{B}\ \frac{1 - x\alpha}{1 + x\alpha} \cos.\theta\, d\theta.$$

Cuando los pesos ocupen toda la estension del arco, los límites de la integracion serán $-\Phi$ y $+\Phi$, y su resultado atendiendo á que x es casi constante y su influencia pequeña, se puede poner bajo la forma

$$Q = Pm\frac{1 - x\alpha}{1 + x'\alpha},$$

en la que P representa el peso colocado en toda la estension del arco y m es una funcion de Φ, que varia segun el modo de reparticion de los pesos. Estos coeficientes se hallan igualmente calculados para cada valor de Φ.

144. Los arcos de figura parabólica se calculan solo por que ofrecen un poco mas de sencillez en sus resultados, y cuando son de pequeña amplitud los dan iguales á los de

un círculo de igual montea y luz; pero las tablas mencionadas para los arcos de círculo hacen inútil suponerlos sustituidos por los parabólicos, cuyo cálculo, por otra parte, no ofrece novedad ni dificultad alguna.

145. La resistencia permanente de las piezas curvas será suficiente, si se verifica la ecuacion

$$R = \frac{T}{\omega} + \frac{v'M}{I}$$

para el valor máximo del segundo miembro: este máximo no se puede hallar directamente con facilidad en todas ocasiones, y entonces se puede recurrir á una construccion gráfica que manifieste la posicion de los puntos de rotura y la mayor presion que tiene lugar en ellos. Supongamos, por ejemplo, un arco CAC' (figura 72) cargado de pesos uniformemente repartidos, y sujeto á las fuerzas S, S' que provienen de las dos reacciones de los apoyos, se puede examinar su resistencia tomando sobre una línea Os (figura 73) distancias proporcionales á las longitudes de la mitad de la pieza AC, y tomando paralelamente á otra línea Or, per-

pendicular á la primera, longitudes proporcionales á la cantidad $\frac{T}{\omega}$, con lo que se obtendrá una curva ABC que representará la presion variable sobre el eje de la mitad de la pieza. Tomando luego longitudes proporcionales á $\frac{Mv'}{I}$ á contar desde la curva ABC, y á ambos lados de ella, se obtendrán las curvas DBGC, EBFC, que representarán la tension ó presion que se verifique en cada punto de las fibras del trasdos ó del intrados del semi-arco. El exámen de la figura hace ver que no hay tension mas que en una longitud representada por Oa desde el vértice en el intrados y en otra longitud representada por bc cerca del arranque en el trasdos. Los puntos de rotura son dos, uno en el vértice por el trasdos, y otro cerca de los arranques en el intrados, dados por los puntos D y F en que la tangente es horizontal, y de los dos, el último es el que ofrece mayor facilidad de rotura en este ejemplo. El punto B en que se cruzan las curvas corresponde á un punto de inflexion en

la elástica, que segun esto ofrecerá la forma Cbac'b'C' (figura 72), en la que los puntos de rotura son b, a y b', y los de inflexion son c y c'. Estas investigaciónes son fáciles cuando ya se conoce por las tablas el valor del empuje Q.

146. A medida que un arco es mas rebajado, conservando la misma luz y la misma carga, es mayor el empuje que produce, pero como el brazo de palanca, ó su distancia á los puntos de la curva es menor, el momento M varía de diverso modo, y conservandose la misma la seccion trasversal, la presion máxima tiene un mínimo para cierto valor de la amplitud del arco. Esta amplitud se halla en los arcos circulares por tanteos numéricos, y su relacion con las dimensiónes de la seccion trasversal y la luz se encuentra en la tabla siguiente:

Valor de α.		Relacion de la longitud del arco con la semicircunferencia. $\frac{2\Phi}{\pi}$
0,0001		0,31.
0,0002		0,37.
0,0003		0,39.
0,0004		0,41.
0,0005		0,43.
0,0006		0,46.
0,0008		0,48.
0,00010		0,51.
0,00012		0,52.
0,00015		0,53.

Por esta tabla se vé que en los casos que ocurren en las aplicaciónes, la amplitud del arco debe estar comprendida entre unos 60° y 90° para que ofrezca el máximo de resistencia de que es capaz.

Leccion 10.ª

Sólidos de igual resistencia.

147. En todo lo que antecede se han estudiado los sólidos cuya seccion trasversal es constante, como sucede casi siempre en las aplicaciones importantes; pero como las piezas de esta forma contienen un exceso de material, porque en todos los puntos que no son de rotura la tension ó presion máxima no llega al límite de la resistencia permanente, puede ser útil averiguar qué ley de variacion habrian de seguir las secciones trasversales para que en todas ellas fuera la misma la máxima desviacion longitudinal relativa.

148. La condicion para que un sólido sea de igual resistencia es que la ecuacion (10) se verifique en todos los puntos

de su longitud. Dado el sistema de fuerzas y la forma del eje, los valores que tomen las cantidades ω, I y v' determinan las dimensiones de la seccion en cada punto del eje, conocida que sea su forma. Se vé seguidamente que puede haber una infinidad de formas de igual resistencia para cada caso en que se encuentren las piezas.

149. En una pieza de eje rectilíneo sujeta á fuerzas que le son perpendiculares, la condicion de igual resistencia es (64).

$$\frac{I}{V'} = \frac{M}{R}$$

Suponiéndola empotrada en una estremidad (figura 74) y cargada de un peso P en la estremidad opuesta y de pesos uniformemente repartidos en toda su longitud, la ecuacion es

$$\frac{I}{V'} = \frac{1}{R}\left[P(a-x) + \frac{1}{2}p\,(a-x)^2\right]$$

y como el momento de rotura es proporcional á la tercera potencia de las líneas homólogas de la seccion, el sólido estará terminado por una superficie de tercer grado, ó grado inferior, cuyo eje sea el de la pieza. Si esta seccion ha de ser un rectángulo, cuyos

lados sean b y $2v'$ de los que se supone b constante, ó que la pieza esté limitada lateralmente por dos planos verticales, se tendrá

$$I = \frac{8bv'^3}{12},$$

y la ecuacion de la superficie cilíndrica que la termina horizontalmente será

$$\frac{2bv'^2}{3} = \frac{1}{R}\left[P(a-x) + \frac{p}{2}(a-x)^2\right]$$

que corresponde á una hipérbola, cuyo eje real es el de la pieza AB, tiene su centro á una distancia $BC = \frac{P}{pa}a$, y su vertice en el punto de aplicacion del peso. En la seccion fija, haciendo $x=0$, resulta

$$c = \sqrt{6\,\frac{\left(P+\frac{pa}{2}\right)a}{Rb}}$$

que será la altura constante del rectangulo si el sólido hubiese de ser prismatico.

Si la carga se reduce al peso P, $p=0$ y el centro está en el infinito, convirtiéndose la curva en una parábola y la seccion fija tiene por altura

$$c = \sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}$$

Si $P=0$, la hipérbola se reduce á dos rectas que pasan por el punto B con el que se ha confundido el centro (figura 75).

150. Cuando el sólido está apoyado por sus dos estremos, cargado en un punto cualquiera de su longitud de un peso $2P$ (95) y de pesos distribuidos uniformemente, siendo la seccion rectangular de base constante, la ecuacion de las superficies superior é inferior será en la parte CA (figura 76)

$$\frac{2}{3}Rbv'^2 = \left[\frac{P(a-d)}{a} + pa\right](a+d-x) - \frac{p}{2}(a+d-x)^2$$

que pertenece á una elipse cuyo eje mayor es el de la pieza y cuyo centro está á una distancia del punto medio igual á

$$\frac{P\frac{a-d}{a}}{pa}\,a:$$

para la otra parte del sólido resulta otra elipse, cuyo centro está á la distancia del punto medio igual á

$$\frac{P\frac{a+d}{a}}{pa}\,a,$$

teniendo cada una su vertice en los puntos de apoyo. Si el peso está en el medio, los dos arcos de elipse son iguales y sus centros están á la distancia $\frac{P}{pa}a$ de dicho punto: si la carga toda está repartida uniformemente, ó $P=0$ cada arco es una semielipse, pero si es $p=0$ se convierten en dos arcos de parabola. La altura de la seccion

en que está el peso aplicado es

$$c=\sqrt{6\frac{(P+\frac{1}{2}pa)}{Rab}(a^2-d^2)}$$

151. Si el peso 2P ha de recorrer toda la distancia AB, la curva que limita al sólido de mínimo volumen es la envolvente de todas las que corresponden á cada posicion del peso, y su ecuacion será la última, en que se tomen como variables $\frac{1}{2}c$ y d, que corresponde á una elipse, cuyo centro está en el punto medio de AB, y su eje menor es

$$\sqrt{\frac{3(P+\frac{1}{2}pa)a}{2Rb}}$$

Todos los puntos en que el peso no está aplicado, tienen una resistencia escesiva.

152. Si los sólidos han de estar terminados por planos horizontales paralelos, las superficies cilíndricas que los terminan verticalmente tienen por directrices parábolas que se reducen á líneas rectas cuando $p=0$. Si la seccion ha de ser circular, son sólidos de revolucion, cuya superficie tiene una meridiana de tercer grado en r: del mismo son las superficies cilíndricas si se fija una relacion entre los dos lados del rectángulo.

153. En un sólido de longitud a empotrado por sus dos estremidades (figura 77), cargado de un peso P en el punto medio y de pesos uniformemente repartidos en su longitud, la condicion de igual resistencia es (304) colocando el origen en el medio C, y tomando hácia arriba las ordenadas positivas,

$$\frac{I}{V'}=\frac{1}{2R}\left[P\left(\frac{1}{4}a-x\right)+\frac{1}{2}p\left(\frac{1}{12}a^2-x^2\right)\right],$$

cuya ecuacion conduce á una forma como la de la figura 77, con dos vértices en los puntos D y E, en que el espesor debería ser nulo. Si la seccion ha de ser rectangular, de base constante, esta ecuacion se convierte en la siguiente:

$$\frac{2}{3}bv'^2=\frac{1}{2R}\left[P\left(\frac{1}{4}a-x\right)+p\left(\frac{1}{12}a^2-x^2\right)\right],$$

que pertenece á una elipse desde C á E, y á una hipérbola desde E á B.

154. Aunque los sólidos de las figuras 74 y 76 tienen en todos sus puntos resistencia suficiente á la desviacion longitudinal, en la proximidad á sus estremos, en que se reduce su espesor á cero, no la tendrán suficiente á la desviacion lateral. Segun la fórmula (4) el espesor de la pieza de la figura

y se puede bajar en cada punto de

$$\frac{P+p(a-x)}{T},$$

cuya ley de variacion estaria representada por el trapecio abdc (figura 78) de lo que resulta que la forma buscada tiene que ser la abcdef (figura 79), resultado de la superposicion de las dos figuras 74 y 78. En el caso de la figura 76, en que los pesos están dirigidos en sentido contrario á las reacciones, el espesor dado por la fórmula (4) es

para la parte AC ...... $\frac{P\frac{a-d}{a}-p(d-x)}{T}$

y para la parte CB ...... $\frac{P\frac{a+d}{a}-p(d+x)}{T}$

segun está representado en la figura 80, resultando de su combinacion con la 76 la forma abcdefg (figura 81) que contiene el menor volumen que puede tener el sólido propuesto para que resista de una manera efectiva á los esfuerzos que lo solicitan. Finalmente, en el sólido de la figura 77, el espesor necesario es

$$\frac{\frac{1}{2}P+px}{T}$$

representado en la figura 82, cuya combina-

cion con la 77, produce la 83.

155. Si un sólido de eje rectilineo (figura 84) está empotrado por una estremidad y sujeto solo á su propio peso, llamando p al de la unidad de volumen y suponiendo que la seccion ha de ser un rectángulo de base ó anchura b constante, el peso de un elemento mn, comprendido entre la estremidad B y un punto cualquiera o respecto del cual se toman los momentos, es

$$2pbv''dx',$$

llamando v'' y x' á las coordenadas del punto n. La condicion de igualdad de resistencia es

$$R\frac{v'^2}{3}=p\int_x^a v''dx'(x'-x):$$

diferenciandola dos veces con respecto á x, resulta

$$pv'=\frac{R}{3}\frac{d^2v'^2}{dx^2}$$

é integrandola ahora, se obtiene la ecuacion

$$v'=\frac{p(a-x)^2}{4R},$$

que corresponde á una parábola de eje vertical, cuyo vértice está en el estremo B.

156. Si en las figuras de igual resistencia se toma solamente la parte de sólido compren-

dida entre una mitad de la cinta y el eje; los centros de gravedad no forman ya una línea recta; pero ordinariamente, como la altura de las secciones es pequeña respecto de la longitud de la pieza, se pueden tomar sin error sensible como exactas las anteriores ecuaciones de momentos, y considerar tambien como sólidos de igual resistencia á los que están terminados por planos horizontales en una de sus caras. Esta disposicion es necesaria cuando han de cargarse pesos inmediatamente sobre las caras del sólido, que es lo mas frecuente. Las figuras 85 reemplazan entonces á las anteriores, pero para que la resistencia sea la misma, ha de ser doble la altura de cada seccion.

157. Un sólido de eje vertical sujeto á un peso en su parte superior, si su altura no escede al límite de las flexiones, no sufrirá mas que compresion, y la figura quedará determinada por la condicion de que en cada seccion horizontal, el área sea igual á la que corresponde al peso que sufre, tanto por la carga como por el peso propio del sólido, que cuando se

trate de columnas de piedra, por ejemplo, podrá ser considerable.

Sea AB (figura 86) el eje de la columna y ab la curva interseccion de la superficie esterior con un plano vertical que pasa por el eje: suponiendo que todas las secciones horizontales sean figuras semejantes, y llamando v á la línea oc que proviene de la interseccion de dicho plano vertical con el de una seccion horizontal, el área de la seccion dada por o podrá representarse por el producto $k\,v^2$, y por consiguiente, el mayor peso que se le pueda cargar será

$$R\,k\,v^2.$$

El peso de un elemento de volúmen mn comprendido entre dos planos horizontales paralelos, llamando p al de la unidad y x', v' á las coordenadas de todo punto situado entre B y o, será

$$p\,k\,v'^2\,dx',$$

y llamando P al peso que carga sobre la cara superior, la ecuacion de la curva ab será

$$R\,k\,v^2 = p\,k\int_0^x v'^2\,dx' + P.$$

Diferenciando esta ecuacion resulta

$$R\frac{dv^2}{dx}=pv^2,$$

é integrándola

$$\frac{2R}{p}l.\,v=x+c.$$

La constante se determina por la condición de que en el punto B en que $x=0$ sea $kv^2=\frac{P}{R}$, y llamando b al valor que toma v en el punto B, queda

$$\frac{2R}{p}l.\frac{v}{b}=x$$

ecuacion que espresa que toda seccion plana vertical habrá de ser una logarítmica que pase á la distancia b del punto B del eje, distancia que se determina por la condicion

$$b=\sqrt{\frac{P}{Rk}}$$

siendo k dependiente solo de la figura que se quiera dar á la seccion.

Cuando el sólido es de pequeña longitud ó su peso específico es poco considerable, la curvatura resulta tan poco sensible que apenas se diferencia de la recta bb' tangente á la logarítmica en b; y aun muchas veces casi se confunde con una vertical.

158. Si el sólido tiene tal longitud, que puede sufrir una flexion sin alterarse su elasticidad, la condicion de igual resistencia es (113)

$$R=\frac{Q}{\omega}+\frac{v'Qy}{I}$$

siendo y la ordenada de la elástica en cada punto del eje, y no considerando la accion del propio peso del sólido. Suponiendo que la seccion sea circular, se tendrá

$$\omega=\pi r^2,\quad I=\frac{\pi r^4}{4},\quad v'=r,$$

por consiguiente, la ecuacion de la meridiana de la superficie de revolucion que termina el sólido será

$$r^3-\frac{Q}{\pi R}r=\frac{4Qy}{\pi R}.$$

Si se supone apoyada la pieza simplemente por su estremo inferior como en la figura 49, la figura es simétrica (figura 87) correspondiendo el mayor espesor cd al medio 0 de la longitud AB, y el menor espesor ab á las estremidades A y B en las que se reduce al necesario para resistir á la presion de la fuerza Q.

159. La elástica correspondiente á un sólido de igual resistencia no es la misma que la que corresponde á uno prismático.

En una pieza recta, horizontal, la ecuacion de la elástica es

$$\frac{\varepsilon}{\rho}=M$$

y como se verifica en todos los puntos de la longitud

$$M = \frac{RI}{V'},$$

resulta

$$\rho' = \frac{E}{R} v'$$

de modo que el radio de curvatura es proporcional á la ordenada de la seccion trasversal. Cuando la pieza esté terminada horizontalmente por dos planos paralelos, la curva será un arco de círculo.

En todos los casos, la flexion de un sólido de igual resistencia es mayor que la de uno prismático circunscrito, por que siendo las secciones menores en el primer caso que en el segundo, oponen menos obstáculo al giro sobre su centro de gravedad.

Leccion 55.ª

De la torsion.

560. Estudiado ya detenidamente uno de los movimientos principales de rotacion que puede tomar la seccion trasversal de un sólido por la combinacion de las fuerzas esteriores con las reacciones elásticas, queda solo por analizar sucintamente la otra rotacion principal, que se conoce con el nombre de torsion. Suponiendo que todas las fuerzas que actúan en una seccion se reduzcan á un par cuyo plano le sea paralelo, el equilibrio de la elasticidad está espresado por la ecuacion (6)

$$N = \frac{\gamma \theta}{z}, \quad \text{------} (6)$$

en la que N es el momento del par γ el momento de torsion, θ la cantidad que la seccion ha girado respecto de la inmediata y z la distancia entre ambas. Llamando ε al giro que ha esperimentado la seccion respecto de su posi-

ción primitiva, y x su distancia á cierto punto del eje del sólido, contada sobre ese mismo eje, el giro respecto de la seccion inmediata, será $\theta = d\mathcal{C}$, y la distancia de las dos será $z = dx$, tomando la ecuacion (6) la forma

$$N = \gamma \frac{d\mathcal{C}}{dx}.$$

161. Suponiendo que el sólido sea de eje recto y seccion constante, y que sea tambien constante el par que tiende á torcerlo, que es el caso que ocurre casi esclusivamente en la práctica (como sucede cuando un árbol cilíndrico AB (figura 88) recibe dos acciones iguales y contrarias aplicadas á las circunferencias de dos ruedas iguales R, R') se le podrá considerar como fijo en su seccion A, y sujeto en la otra estremidad B á la accion del par. Tomando por orígen de las coordenadas x el punto A, y la recta Aa y sus homólogas y paralelas como las Ca' y Ba'', en las demas secciones para orígen de los ángulos $\mathcal{C}$, la torsion que ha esperimentado el árbol desde A hasta C se encontrará que es, integrando la ecuacion última

$$N = \gamma \frac{\mathcal{C}}{x}$$

sin constante añadida, por que en la seccion A son $\mathcal{C} = 0$ y $x = 0$; y en el punto B, en que $x = a$, y $\mathcal{C} = B$, se tendrá

$$N = \gamma \frac{B}{a}.$$

Este resultado indica que el ángulo de torsion en cada punto del eje es proporcional á su distancia á la estremidad del sólido, y que la desviacion lateral relativa de las secciones inmediatas es constante en toda la longitud, resultando que las lineas que antes de la torsion eran rectas, se convierten despues de ella en hélices. Se comprende de este modo lo perjudiciales que han de ser en la maquinaria los árboles de trasmision muy largos y delgados, por que admitiendo una torsion considerable, no comunicarán el movimiento que reciben en una estremidad á la opuesta sino con cierto retraso, que conviene muchas veces evitar.

162. Debe recordarse que la fórmula (6) se ha establecido en la suposicion de que todas las secciones planas perpendiculares al eje del sólido, se conservan planas despues de la torsion (45); pero esta hipótesis no es exacta,

ni aun aproximada, fuera del caso en que la seccion sea circular, y por consiguiente las fórmulas que se acaban de establecer no se pueden aplicar mas que á los cilindros de revolucion, que por otra parte son las formas que casi esclusivamente se someten á torsiones considerables. Un análisis mas delicado hace ver que si la seccion es un cuadrado, la ecuacion de equilibrio es

$$N = 0,843\, \gamma \frac{\varepsilon}{x},$$

y si es una estrella de cuatro puntas de la misma longitud que el núcleo, se reduce á

$$N = 0,54\, \gamma \frac{\varepsilon}{x},$$

resultados que demuestran que el círculo es la forma de mayor resistencia á los efectos de la torsion.

163. La desviacion lateral relativa de un punto de la seccion, cuya distancia al eje sea r, es

$$\frac{r\theta}{z},$$

y como por la ecuacion (6)

$$\frac{\theta}{z} = \frac{N}{\gamma},$$

esta desviacion se puede espresar en funcion de las fuerzas que la ocasionan por la fórmula

$$\frac{r\,N}{\gamma}$$

y llamando r' al mayor radio de la seccion, la condicion de resistencia suficiente en ella será

$$\frac{T}{G} = \text{ó} > \frac{r' N}{\gamma},$$

de la que se deduce la ecuacion de resistencia

$$N = T \frac{K}{r'},$$

cuyo segundo miembro se llama el momento de rotura, y sirve para determinar las dimensiones de los sólidos ó las fuerzas que se les pueden aplicar.

164. Por lo dicho antes (162) esta ecuacion no es exacta mas que para los sólidos circulares, pero para los demas, no solo se ha de afectar el momento de torsion del coeficiente que se ha indicado, sino que se ha de tener presente que en virtud del alabeo de las secciones, el punto de rotura se halla en los del contorno de la seccion que distan menos del centro de gravedad, correspondiendo en un cuadrado al punto medio de cada lado. Asi es, que el momento de rotura de un círculo de radio r es (56 y 163)

$$T \frac{\pi r^3}{2}$$

nero el de un cuadrado cuyo lado sea b será (52, 53 y 162)

$$0,843\,T\,\frac{b^3}{3};$$

resultados que confirma la esperiencia, pues las barras prismáticas que se tuercen escesivamente, se rompen rajándose por sus caras en sentido de la longitud.

165. Un árbol AB (figura 89) fijo en sus dos secciones estremas, y que sostiene en un punto C un peso P á cierta distancia CD del eje, por consecuencia de la traslacion de esta fuerza al punto C se encuentra solicitado á la torsion por el par (P, P'') al mismo tiempo que la fuerza P' igual á estas, ocasiona una flexion del género de las estudiadas en las lecciones 5.ª y 6.ª; pero se ha observado que mientras N no llegue á ser $\frac{2}{5}$ del mayor valor de M, las dimensiones que dá el cálculo de la flexion son suficientes para resistir á la torsion. Cuando el momento N sea mayor, el cálculo de las dimensiones exactas tendria demasiada complicacion, y entonces se pueden buscar aparte las dimensiones del sólido

que requieren por sí solas la flexion y la torsion, y adoptar las que resulten mayores, cuidando, sin embargo, de introducir los coeficientes de rotura (leccion 2.ª) que correspondan á las obras de gran solidez, para prevenir el efecto de la combinacion de ambos movimientos, que se ayudan mutuamente para aumentar las deformaciones de la pieza en que se verifican.

Apéndices.

Apéndice 1.º

Manera de esperimentar la resistencia de los materiales.

El objeto de este apéndice es dar á conocer las reglas que han seguido y las precauciones que han tomado los mas hábiles observadores que se han ocupado hasta ahora de esta clase de esperimentos. Dos cosas son las que hay que estudiar en ellos; la primera es el modo de disponer y preparar los ejemplares que se someten á las pruebas, y la segunda las máquinas y aparatos con los cuales se hacen.

Por regla general, se procurará que el sólido que se somete á la prueba sea homogéneo en su testura y que tenga con la mayor exactitud la forma segun la que se le quiera ensayar. Tambien se cuidará de que se halle siempre en las mismas circunstancias de humedad, temperatura &ª no aun-

podrian influir notablemente en el resulta-
do de las operaciones cuando son delicadas.

Segun sea la resistencia que se ensa-
ye, así será la forma que se dé al ejemplar.
Cuando se trate de la resistencia á la com-
presion, no se dejará parte alguna escedente
á la figura que deba afectar: si debe apoyarse
en bases paralelas, es conveniente hacerlo por
medio de cartones blandos que anulen ó dis-
minuyan el efecto del alabeo y reemplacen
el mortero que se usa en las obras; precaucion
inútil en las esferas y cilindros, pues que su
apoyo se ha de verificar solo por un punto ó
una línea. Si la materia que se ensaya es
blanda, como la arcilla, es menester ademas
ir quitando la masa rebasada á medida que
se verifica el aplastamiento.

Para someter los materiales á la esten-
sion, es preciso dejar en los estremos un re-
salto para verificar por él la traccion (figu-
ra 90).

Cuando se quiera ensayar la rotura en
una direccion dada, se determina antes la
seccion por unas pequeñas escotaduras ó in-

cisiones y se colocan cinchos y armaduras
paralelos á ella (figura 93.)

Las barras de hierro se terminan por
ambos lados con un ojo (figura 98.)

Para la resistencia lateral se puede
disponer el sólido en forma de un paraleli-
pípedo en el cual se abren dos cajas cilín-
dricas opuestas (figura 92) que dejan en-
tre medio un cilindro macizo, el cual ha de
desprenderse del resto de la masa para me-
dir esta resistencia.

Para probar las resistencias á la fle-
xion y á la torsion, casi nunca sufren los ma-
teriales modificacion en su forma, sino es en
el caso en que se quiera tener una seccion
perfectamente fija ó empotrada, para lo cual
se dispone la cabeza ó estremo en resalto, cu-
ya parte es la que se fija, y el sólido entonces,
empotrado en su misma masa, queda com-
pletamente invariable.

Las máquinas ó aparatos constan de diver-
sas partes, cada una de las cuales merece espe-
cial atencion. Los apoyos del sistema son la
primera, que importa mucho que sean completa-

mente invariables. Conviene por esto hacerlos de materias muy rígidas, como el hierro fundido, dando á los soportes formas triangulares arriostrándolos perfectamente y empotrándolos, si es posible, en un suelo y muros de fábrica. Aun de este modo cuando se hacen operaciones muy delicadas, conviene medir el asiento no permanente de la obra, lo cual se consigue por medio de una escala fija en un punto del muro, cuyo movimiento se observa.

Otra parte muy interesante son los apoyos del sólido de prueba. Cuando se ensaya la resistencia longitudinal, es indispensable que la presion se reparta igualmente en toda su base, para lo cual deben colocarse los ejemplares entre discos muy rígidos de metal: sobre uno de estos discos se coloca una maza de hierro terminada en cuchillo para recibir la presion. Cuando los esperimentos versan sobre la flexion, los apoyos deben reducirse á una sola línea, para lo que se emplean cuchillos ó varillas cilíndricas de acero pulimentado, y si el rozamiento

del sólido con la varilla se juzga demasiado considerable, se puede sustituir esta por un rodillo (figura 93). El empotramiento se obtiene prolongando la pieza cierta longitud mas allá del apoyo y comprimiéndola por medio de un puente y dos tuercas (figura 94). La flexion se impide en todo ó parte con guias ó correderas entre las cuales se coloca el sólido ó solamente sus cabezas. Finalmente, para el ensayo de la torsion, se puede sujetar un estremo del sólido entre los dientes de un tornillo de cerragero, y apoyar el otro en una garganta circular abierta en un disco de madera ó metal, ó bien puede sujetarse en el medio haciendo en el sólido un resalto y apoyando los dos estremos en una superficie convexa y pulimentada.

Los esfuerzos á que se somete el sólido se aprecian de diversos modos. Cuando no han de ser muy considerables, se pueden colocar inmediatamente en el punto dado del sólido, por medio de un platillo de balanza sujeto á un estribo con pasador cilíndrico (figura 100) ó una cadena de eslabones planos, ó á las

Vaucanson á (figura 95). Como pesos pueden ponerse lingotes de hierro, y cuando se quiere colocar la carga con suavidad y apreciar diferencias pequeñas, se emplea arena ó agua. De todos modos, para evitar movimientos bruscos, conviene que el platillo esté apoyado en la tuerca de un tornillo ó en cuatro gatos (figura 95).

Si los pesos han de ser de mas consideracion se aplican por medio de palancas de hierro ó madera fijas por un estremo á un pasador (figura 96) que llevan en el otro un platillo con los pesos, y se apoyan en un punto intermedio en el cuchillo ó cilindro que toca á la pieza de ensayo; ó estando apoyadas en un cuchillo fijo en un punto intermedio (figura 97) trasmiten la presion de abajo arriba por el otro estremo sin sufrir ninguna pérdida por el rozamiento. La influencia de la barra, platillo y cadenas se tiene en cuenta pesandolos antes con una romana, ó se anula por medio de contrapesos fijos al mismo aparato (figura 96). En estos casos es inutil emplear precauciones para que

la carga descienda lentamente, pues los movimientos que origina se reducen en el punto de presion á la décima ó vigésima parte. Un sistema de cuerdas y polipastos permite levantar toda la carga en un momento. Para evitar los errores que provienen de los rozamientos de la palanca y multiplicar el efecto de los pesos, Rondelet empleó un tornillo (figura 97) en cuya cabeza un arco de hierro recibe una cuerda solicitada por un peso que trasmite la presion á la pieza que se ensaya. Ademas de estar bien calculada la resistencia pasiva del tornillo, la presion se puede comprobar por medio de la palanca, que se conserva. Esta pieza puede tener una longitud variable, aunque es disposicion defectuosa.

En los esperimentos en escala mayor se ha empleado la fuerza de una prensa hidráulica.

La última parte importante de estos aparatos, es el deflectómetro, ó pieza destinada á medir las flexiones, alargamientos ó compresiones que sufren los sólidos.

Puede usarse una regla con su nonius,

pero es preferible un instrumento que multiplique las longitudes, que puede recibir diferentes figuras, segun el objeto á que se destine. Para medir los alargamientos de las barras de hierro Barlow usó el representado en la figura 98, que se compone de dos torniquetes de hierro A B que se fijan en la barra á la distancia cuya alteracion se quiere medir. En el primero A, se atornilla una plancha de cobre con un arco graduado y una palanca con su nonius giratoria en a; el segundo B lleva una pieza b que puede deslizar á lo largo de una corredera por medio del tornillo de aproximacion c: d, d' son dos puntas de acero á las cuales se fija una varilla de madera de igual longitud que la parte de barra comprendida entre A y B. Con el tornillo c se puede hacer que la linea de fé del nonius coincida con el cero, y las variaciones que en su distancia sufran los puntos A y B, quedando la d d' invariable, se podrán medir por el arco graduado. En cualquier punto de la operacion que se

quiera, puede volverse la linea de fé al cero y observar la influencia de un aumento de carga.

Cuando se hayan de medir alteraciones momentaneas se puede sustituir al arco de cobre uno de alambre (figura 99) con dos indices a, a' que deslizan ajustados á lo largo de dicho arco: una placa b en que termina la palanca coloca á los indices en su estrema posicion.

Otro instrumento que mide las longitudes aumentadas es el representado en la figura 100; consiste en un disco graduado d fijo; en su centro un eje recibe un hilo que por un lado está fijo en el punto cuyo movimiento se observa p y por el otro á la superficie del cilindro. Un indice unido al eje marca en la graduacion del disco el movimiento, que estará con el del punto p en la relacion de los radios del circulo graduado y del cilindro. Un contrapeso e equilibra en todas sus posiciones el aparato.

Pueden hacerse mas sensibles las

desviaciones reuniendo la palanca con el disco, como en el aparato de la figura 96.

Cuando se hayan de medir solo flexiones, puede usarse una barra encorvada en los dos estremos con un tornillo micrométrico en el centro (figura 105) que dará tantas vueltas como pasos haya bajado, y la fraccion de un paso se medirá por la de la circunferencia de la cabeza.

En las observaciones en grande escala, como en los largueros de puentes, puede emplearse un tablero vertical fijo y una punta de lápiz que unida á la viga y oprimida por un resorte marque en el tablero la estension de la flecha.

Los efectos de la torsion se miden en un círculo graduado que puede colocarse en la misma polea que recibe el peso, cuya accion la determina. Tambien puede medirse por la longitud de cuerda desarrollada.

Apéndice 2º.

Tablas numéricas

para hallar el empuje de los arcos circulares, calculadas por Mr. Bresse, profesor de mecánica aplicada en la Escuela de puentes y calzadas de Paris.

Estas tablas se aplican á los arcos de figura circular y seccion constante que tienen sus dos estremos fijos á un mismo nivel, y que se doblan en su plano vertical, cuando la carga consiste en pesos distribuidos de un modo cualquiera.

La tabla 1ª da el coeficiente $\frac{A}{B}$ de la fórmula (17) para las amplitudes angulares del arco, representadas por la relacion $\frac{2\Phi}{\pi}$, desde 0,12 hasta la unidad que corresponde al arco de medio punto, y en la suposicion de que haya un solo peso P apli.

cado á un punto del arco, cuya posicion relativamente al vértice varía desde $\frac{\theta}{\Phi} = 0$ hasta $\frac{\theta}{\Phi} = 0,95$, por que cuando $\theta = \Phi$ resulta $\frac{A}{B} = 0$, pues el peso está sostenido directamente por un apoyo.

La tabla 2.ª dá el valor del coeficiente m de la fórmula de la página 143 para los mismos valores de $\frac{2\Phi}{\pi}$, tanto en el caso de que la carga P esté repartida uniformemente sobre el arco, como en el que lo esté paralelamente á su proyeccion horizontal.

Finalmente, la tabla 3.ª dá el coeficiente de correccion de ambas fórmulas

$$\frac{1 - K\alpha}{1 + K'\alpha}$$

calculado por el término medio de los valores de K, entre los límites indicados de $\frac{2\Phi}{\pi}$ y para valores de α que varían desde 0,0005 hasta 0,0025. Si se supone $\alpha = 0$ este coeficiente es igual á la unidad.

Tabla I.

Coeficiente de la parte principal del empuje ocasionado por un peso colocado en un punto cualquiera del arco.

Amplitud del arco. $\frac{2\Phi}{\pi}$	Valores de $\frac{\theta}{\Phi}$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,12	4,125	4,112	4,075	4,012	3,926	3,816	3,682	3,526	3,348	3,149
0,13	3,804	3,793	3,758	3,700	3,621	3,519	3,396	3,251	3,087	2,903
0,14	3,529	3,518	3,486	3,432	3,359	3,264	3,150	3,016	2,863	2,692
0,15	3,291	3,281	3,251	3,200	3,132	3,043	2,936	2,811	2,669	2,509
0,16	3,082	3,072	3,044	2,997	2,933	2,862	2,749	2,632	2,498	2,349
0,17	2,897	2,888	2,862	2,817	2,757	2,679	2,584	2,474	2,348	2,207
0,18	2,733	2,725	2,700	2,657	2,600	2,526	2,437	2,333	2,214	2,081
0,19	2,586	2,578	2,554	2,514	2,460	2,390	2,305	2,206	2,094	1,968
0,20	2,453	2,446	2,423	2,385	2,334	2,267	2,187	2,093	1,985	1,866
0,21	2,333	2,326	2,304	2,268	2,219	2,156	2,079	1,989	1,887	1,774
0,22	2,224	2,217	2,196	2,162	2,115	2,054	1,981	1,895	1,798	1,689
0,23	2,124	2,117	2,098	2,064	2,019	1,961	1,891	1,809	1,716	1,612
0,24	2,032	2,026	2,007	1,975	1,932	1,876	1,809	1,730	1,641	1,541
0,25	1,947	1,941	1,923	1,893	1,851	1,798	1,733	1,658	1,572	1,476
0,26	1,869	1,863	1,846	1,817	1,777	1,725	1,663	1,590	1,508	1,416
0,27	1,797	1,791	1,774	1,746	1,707	1,658	1,598	1,528	1,448	1,360
0,28	1,729	1,724	1,708	1,680	1,643	1,595	1,537	1,470	1,393	1,308
0,29	1,666	1,661	1,645	1,619	1,583	1,537	1,481	1,415	1,341	1,259
0,30	1,607	1,602	1,587	1,561	1,527	1,482	1,428	1,365	1,293	1,213
0,31	1,552	1,547	1,533	1,508	1,474	1,431	1,378	1,317	1,248	1,170
0,32	1,500	1,496	1,481	1,457	1,424	1,389	1,332	1,272	1,205	1,130
0,33	1,452	1,447	1,433	1,410	1,378	1,337	1,288	1,230	1,165	1,092
0,34	1,406	1,401	1,388	1,365	1,334	1,294	1,246	1,190	1,127	1,057
0,35	1,362	1,358	1,344	1,322	1,292	1,254	1,207	1,153	1,091	1,023
0,36	1,321	1,317	1,304	1,282	1,253	1,215	1,170	1,117	1,057	0,991

Tabla I.

Amplitud del arco $\frac{2\Phi}{\pi}$	Valores de $\frac{\theta}{\Phi}$									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,12	2,931	2,694	2,441	2,171	1,888	1,592	1,286	0,972	0,651	0,327
0,13	2,702	2,484	2,250	2,001	1,740	1,467	1,185	0,895	0,600	0,301
0,14	2,506	2,303	2,086	1,855	1,612	1,360	1,098	0,830	0,556	0,279
0,15	2,335	2,146	1,943	1,728	1,502	1,266	1,023	0,772	0,517	0,259
0,16	2,186	2,008	1,816	1,617	1,405	1,184	0,956	0,722	0,484	0,242
0,17	2,054	1,887	1,708	1,518	1,319	1,112	0,898	0,678	0,454	0,227
0,18	1,936	1,778	1,610	1,431	1,243	1,048	0,845	0,638	0,427	0,214
0,19	1,830	1,681	1,521	1,352	1,175	0,990	0,799	0,603	0,403	0,202
0,20	1,735	1,594	1,442	1,281	1,112	0,937	0,756	0,571	0,382	0,191
0,21	1,649	1,514	1,370	1,217	1,057	0,890	0,718	0,542	0,362	0,181
0,22	1,571	1,442	1,304	1,159	1,006	0,847	0,683	0,515	0,344	0,172
0,23	1,499	1,376	1,244	1,105	0,959	0,807	0,651	0,491	0,328	0,164
0,24	1,433	1,315	1,189	1,056	0,916	0,771	0,621	0,468	0,313	0,157
0,25	1,372	1,259	1,138	1,010	0,876	0,737	0,594	0,448	0,299	0,149
0,26	1,315	1,207	1,091	0,968	0,839	0,706	0,569	0,428	0,286	0,143
0,27	1,263	1,156	1,047	0,929	0,805	0,677	0,545	0,411	0,274	0,137
0,28	1,214	1,114	1,006	0,892	0,773	0,650	0,523	0,394	0,263	0,131
0,29	1,169	1,072	0,968	0,858	0,744	0,625	0,503	0,379	0,253	0,126
0,30	1,126	1,032	0,932	0,826	0,716	0,601	0,484	0,364	0,243	0,121
0,31	1,086	0,995	0,899	0,796	0,690	0,579	0,466	0,350	0,234	0,116
0,32	1,049	0,961	0,867	0,768	0,665	0,558	0,449	0,337	0,225	0,112
0,33	1,013	0,923	0,837	0,742	0,642	0,539	0,433	0,325	0,217	0,108
0,34	0,980	0,897	0,809	0,716	0,620	0,520	0,418	0,314	0,209	0,104
0,35	0,948	0,868	0,782	0,693	0,599	0,502	0,403	0,303	0,202	0,100
0,36	0,918	0,840	0,757	0,670	0,579	0,486	0,390	0,292	0,195	0,097

Tabla I.

Amplitud del arco $\frac{2\Phi}{\pi}$	Valores de $\frac{\theta}{\Phi}$ 0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,37	1,282	1,278	1,265	1,244	1,216	1,179	1,135	1,083	1,025	0,960
0,38	1,245	1,241	1,228	1,208	1,180	1,144	1,101	1,051	0,994	0,931
0,39	1,209	1,205	1,194	1,174	1,146	1,111	1,069	1,021	0,965	0,904
0,40	1,176	1,172	1,160	1,142	1,114	1,080	1,039	0,991	0,937	0,877
0,42	1,113	1,109	1,098	1,080	1,054	1,022	0,983	0,937	0,885	0,828
0,44	1,056	1,052	1,042	1,024	0,999	0,968	0,931	0,887	0,838	0,783
0,46	1,003	1,000	0,990	0,972	0,949	0,919	0,883	0,841	0,794	0,742
0,48	0,955	0,951	0,942	0,925	0,903	0,874	0,839	0,799	0,754	0,704
0,50	0,910	0,907	0,897	0,881	0,859	0,832	0,798	0,760	0,716	0,668
0,52	0,868	0,865	0,856	0,840	0,819	0,793	0,760	0,723	0,681	0,635
0,54	0,829	0,826	0,817	0,802	0,782	0,756	0,725	0,689	0,648	0,604
0,56	0,793	0,790	0,781	0,767	0,747	0,722	0,692	0,657	0,618	0,575
0,58	0,758	0,756	0,747	0,733	0,714	0,690	0,661	0,627	0,589	0,548
0,60	0,726	0,723	0,715	0,702	0,683	0,659	0,631	0,599	0,562	0,522
0,62	0,696	0,693	0,685	0,672	0,654	0,631	0,603	0,572	0,536	0,497
0,64	0,667	0,665	0,657	0,644	0,626	0,607	0,577	0,546	0,512	0,474
0,68	0,614	0,612	0,604	0,592	0,575	0,554	0,528	0,499	0,467	0,431
0,72	0,566	0,564	0,557	0,545	0,529	0,508	0,484	0,456	0,426	0,392
0,76	0,522	0,520	0,516	0,502	0,486	0,467	0,444	0,417	0,388	0,356
0,80	0,482	0,480	0,473	0,462	0,447	0,429	0,406	0,381	0,353	0,323
0,84	0,445	0,443	0,436	0,426	0,411	0,393	0,372	0,347	0,320	0,292
0,88	0,410	0,408	0,402	0,391	0,378	0,360	0,339	0,316	0,290	0,262
0,92	0,378	0,376	0,370	0,360	0,346	0,329	0,309	0,286	0,261	0,235
0,96	0,347	0,345	0,349	0,329	0,316	0,300	0,280	0,258	0,234	0,209
1,00	0,318	0,316	0,311	0,301	0,288	0,272	0,253	0,231	0,208	0,184

Tabla I.

Amplitud del arco $\frac{2\Phi}{\pi}$	Valores de $\frac{\theta}{\Phi}$ 0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,37	0,890	0,814	0,733	0,649	0,560	0,470	0,377	0,283	0,188	0,093
0,38	0,863	0,789	0,711	0,628	0,543	0,454	0,364	0,273	0,181	0,090
0,39	0,837	0,765	0,689	0,609	0,526	0,440	0,353	0,264	0,175	0,087
0,40	0,812	0,742	0,668	0,590	0,509	0,426	0,341	0,256	0,170	0,084
0,42	0,766	0,700	0,629	0,555	0,479	0,400	0,320	0,240	0,159	0,079
0,44	0,724	0,661	0,594	0,524	0,451	0,377	0,301	0,225	0,149	0,074
0,46	0,685	0,625	0,561	0,494	0,425	0,345	0,283	0,211	0,140	0,069
0,48	0,650	0,592	0,531	0,467	0,401	0,334	0,266	0,198	0,131	0,065
0,50	0,616	0,559	0,502	0,442	0,379	0,315	0,251	0,187	0,123	0,061
0,52	0,585	0,532	0,476	0,418	0,358	0,297	0,236	0,176	0,115	0,057
0,54	0,556	0,505	0,451	0,396	0,339	0,281	0,223	0,165	0,108	0,053
0,56	0,529	0,480	0,428	0,375	0,320	0,265	0,210	0,155	0,102	0,050
0,58	0,503	0,456	0,408	0,355	0,303	0,250	0,198	0,146	0,096	0,047
0,60	0,479	0,433	0,385	0,336	0,285	0,236	0,186	0,137	0,090	0,044
0,62	0,456	0,412	0,366	0,319	0,271	0,223	0,175	0,129	0,084	0,041
0,64	0,434	0,391	0,347	0,302	0,256	0,210	0,165	0,121	0,078	0,038
0,68	0,393	0,354	0,313	0,271	0,228	0,187	0,146	0,106	0,068	0,033
0,72	0,356	0,319	0,281	0,242	0,203	0,165	0,128	0,092	0,059	0,028
0,76	0,322	0,287	0,251	0,215	0,180	0,145	0,111	0,080	0,050	0,024
0,80	0,291	0,258	0,224	0,191	0,158	0,126	0,096	0,068	0,042	0,019
0,84	0,261	0,230	0,199	0,168	0,137	0,108	0,081	0,057	0,035	0,016
0,88	0,234	0,204	0,175	0,146	0,118	0,092	0,068	0,046	0,027	0,012
0,92	0,208	0,180	0,152	0,125	0,100	0,076	0,055	0,036	0,021	0,008
0,96	0,183	0,157	0,131	0,106	0,082	0,061	0,042	0,027	0,014	0,005
1,00	0,159	0,134	0,110	0,087	0,066	0,047	0,030	0,017	0,008	0,002

Tabla II.

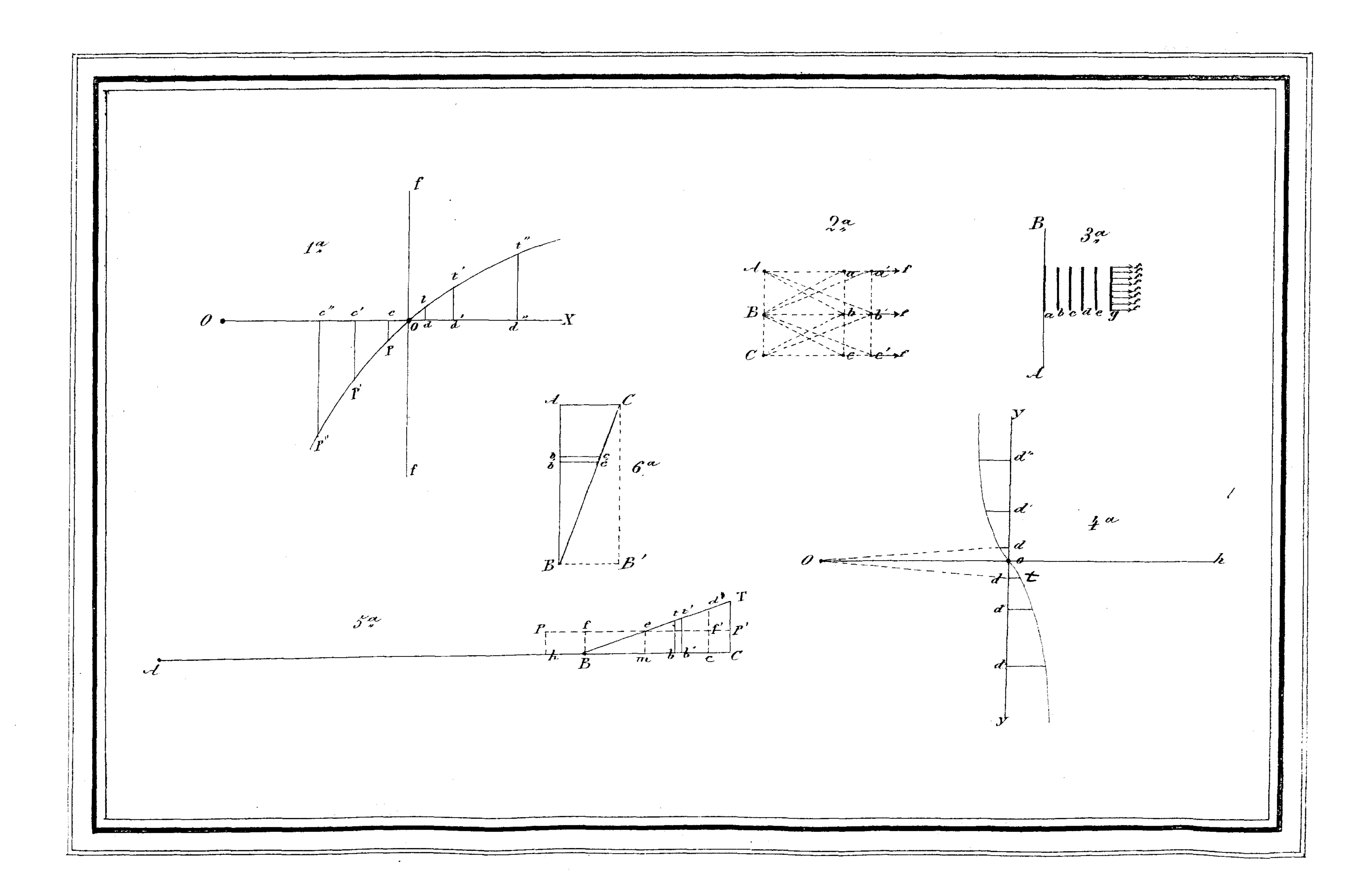
Coeficiente de la parte principal del empuje producido por un peso distribuido uniformemente sobre todo el arco, segun su longitud ó segun su proyeccion horizontal.

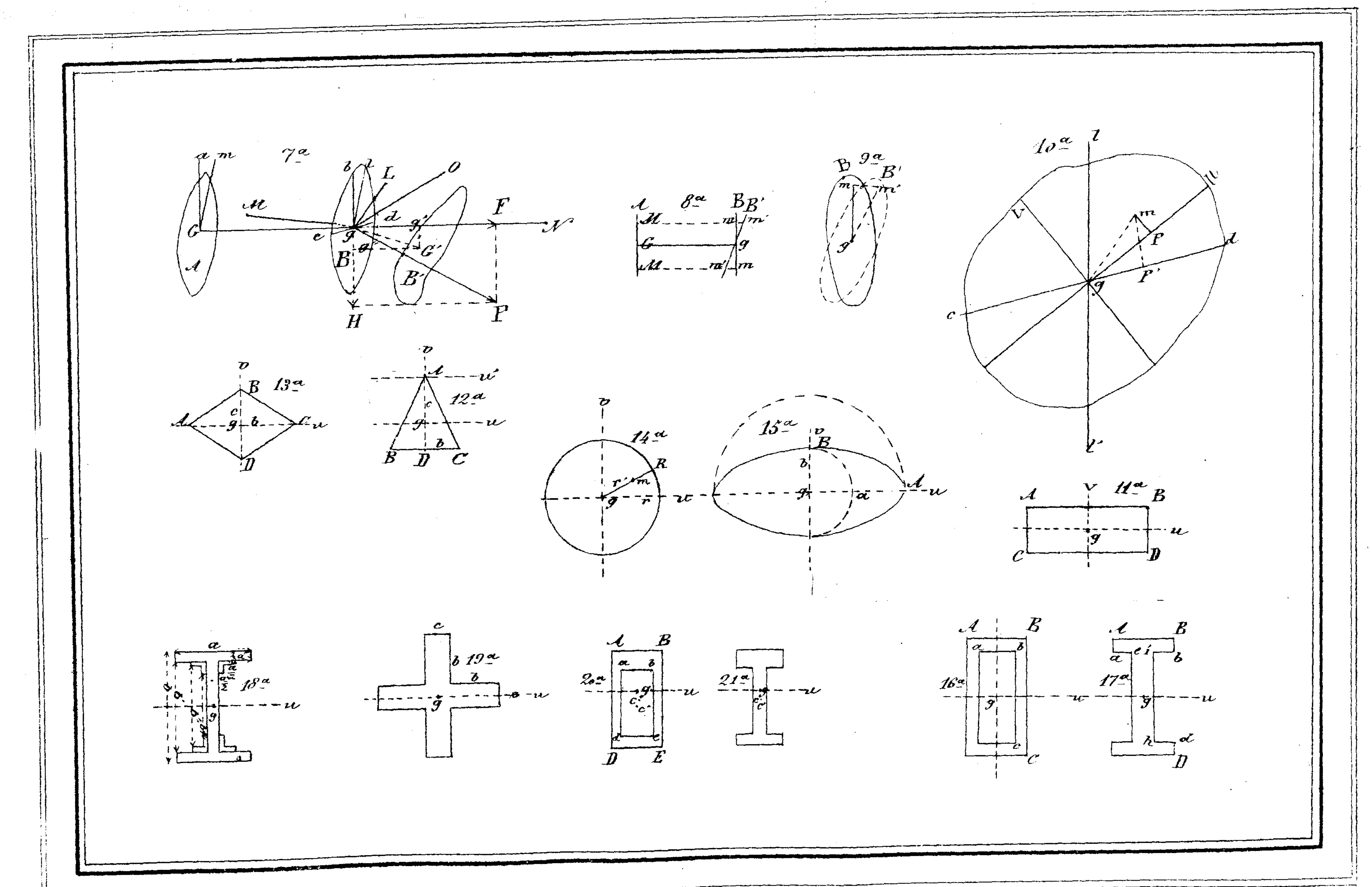
Amplitud del arco. $\frac{2\Phi}{\pi}$	Coeficiente para la reparticion proporcional á la		Amplitud del arco. $\frac{2\Phi}{\pi}$	Coeficiente para la reparticion proporcional á la	
	Longitud	Proyeccion horizontal.		Longitud	Proyeccion horizontal.
0, 12	2, 635	2, 641	0, 37	0, 804	0, 825
0, 13	2, 429	2, 436	0, 38	0, 780	0, 802
0, 14	2, 253	2, 261	0, 39	0, 757	0, 779
0, 15	2, 100	2, 108	0, 40	0, 735	0, 758
0, 16	1, 965	1, 974	0, 42	0, 694	0, 718
0, 17	1, 847	1, 856	0, 44	0, 657	0, 681
0, 18	1, 741	1, 751	0, 46	0, 622	0, 648
0, 19	1, 647	1, 657	0, 48	0, 590	0, 617
0, 20	1, 562	1, 573	0, 50	0, 561	0, 589
0, 21	1, 484	1, 496	0, 52	0, 533	0, 562
0, 22	1, 414	1, 426	0, 54	0, 507	0, 537
0, 23	1, 349	1, 362	0, 56	0, 483	0, 514
0, 24	1, 290	1, 304	0, 58	0, 460	0, 492
0, 25	1, 236	1, 250	0, 60	0, 439	0, 472
0, 26	1, 185	1, 200	0, 62	0, 418	0, 453
0, 27	1, 138	1, 153	0, 64	0, 399	0, 435
0, 28	1, 095	1, 110	0, 68	0, 364	0, 401
0, 29	1, 054	1, 070	0, 72	0, 331	0, 371
0, 30	1, 016	1, 033	0, 76	0, 301	0, 343
0, 31	0, 980	0, 998	0, 80	0, 273	0, 317
0, 32	0, 947	0, 964	0, 84	0, 248	0, 293
0, 33	0, 915	0, 933	0, 88	0, 224	0, 271
0, 34	0, 885	0, 904	0, 92	0, 201	0, 251
0, 35	0, 857	0, 876	0, 96	0, 180	0, 231
0, 36	0, 830	0, 850	1, 00	0, 155	0, 212

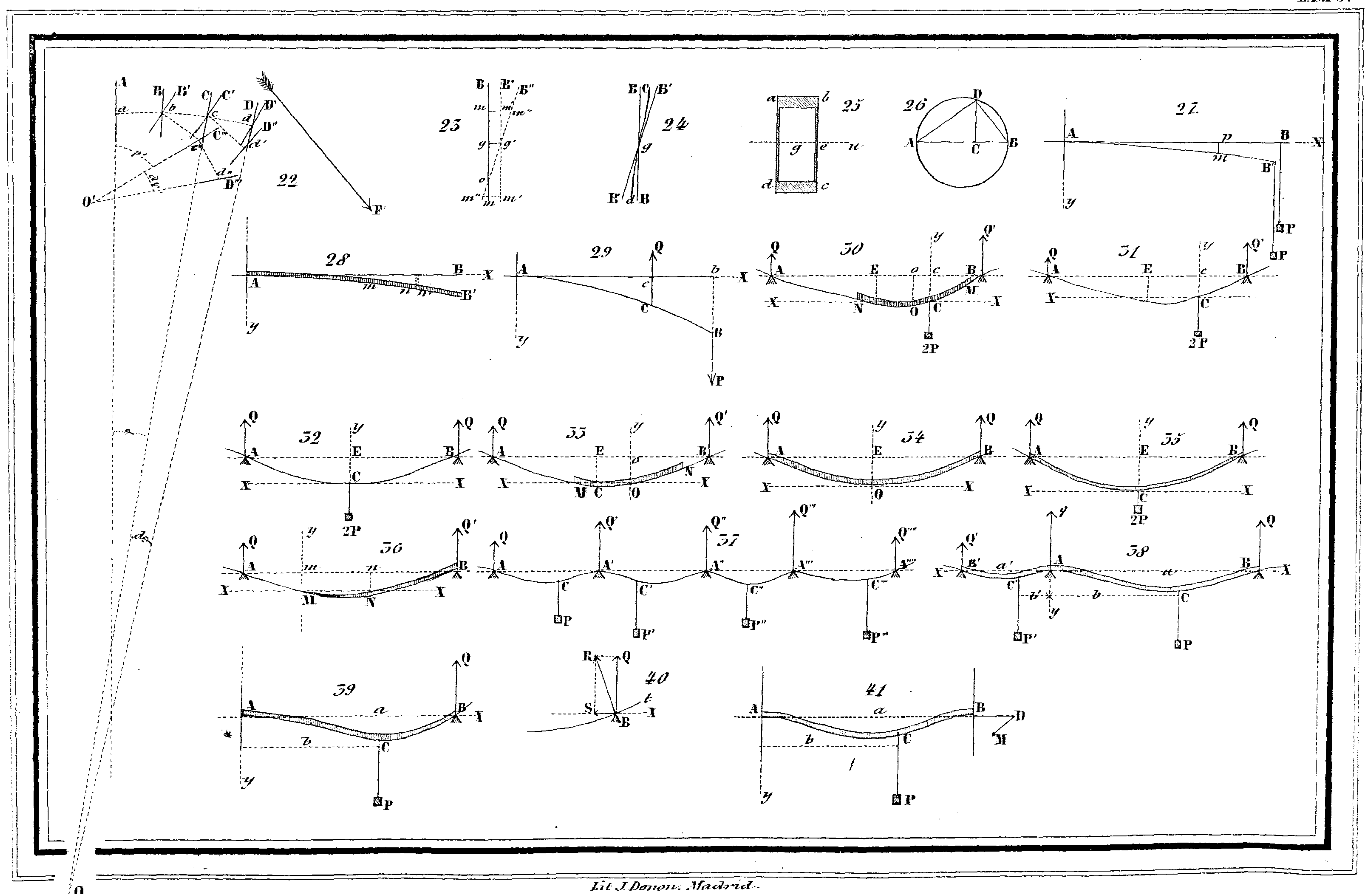
Tabla III.

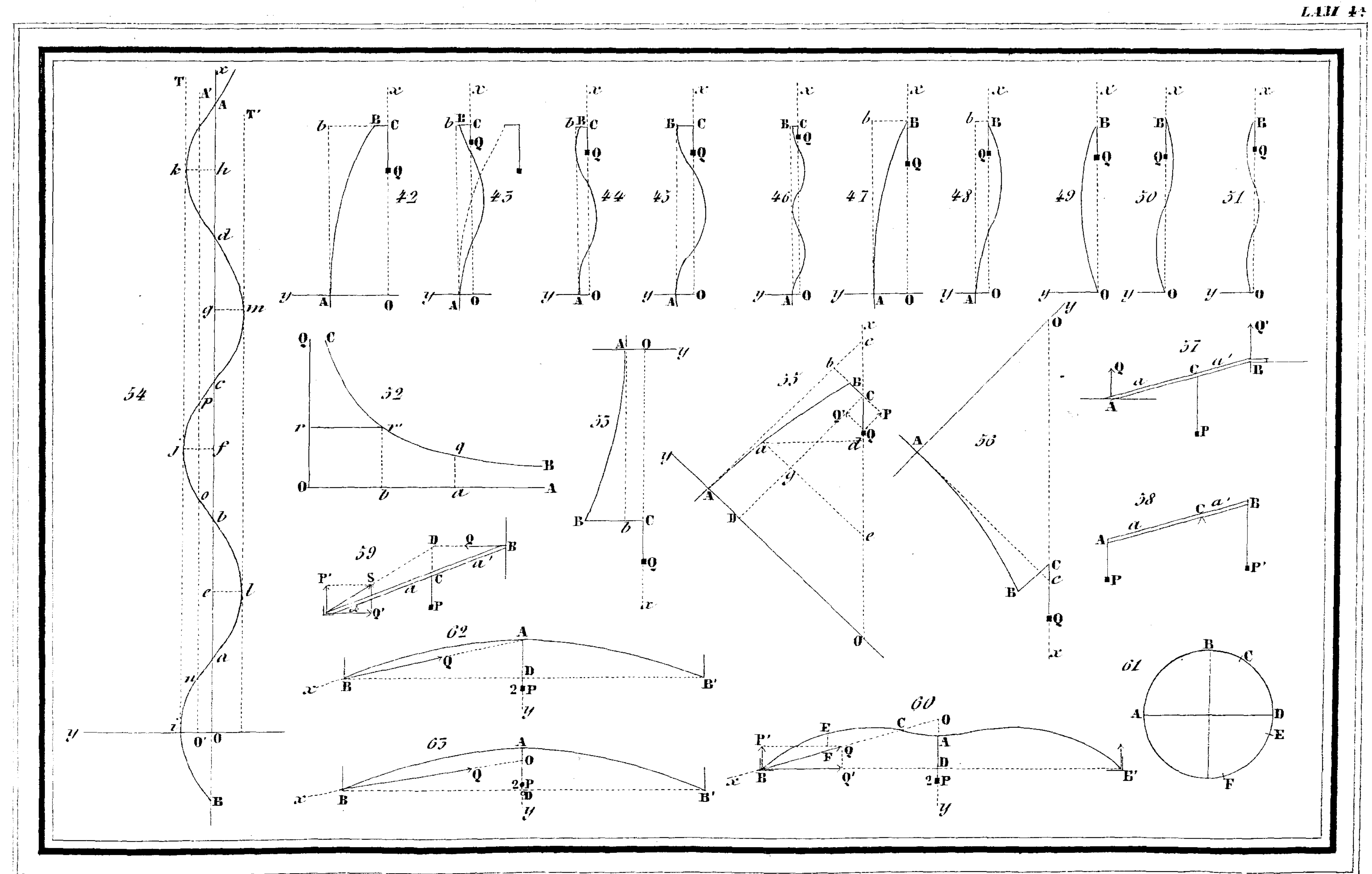
Coeficiente de correccion del empuje producido por pesos cualesquiera.

Amplitud del arco $\frac{2\Phi}{\pi}$	Valores de α					Amplitud del arco $\frac{2\Phi}{\pi}$	Valores de α				
	0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025		0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025
0,12	0,905	0,826	0,760	0,703	0,654	0,37	0,989	0,979	0,969	0,959	0,950
0,13	0,918	0,848	0,788	0,736	0,690	0,38	0,990	0,980	0,971	0,961	0,952
0,14	0,928	0,866	0,812	0,764	0,721	0,39	0,991	0,981	0,972	0,963	0,955
0,15	0,937	0,882	0,832	0,788	0,748	0,40	0,991	0,982	0,974	0,965	0,957
0,16	0,944	0,895	0,850	0,809	0,772	0,42	0,992	0,984	0,976	0,969	0,961
0,17	0,951	0,906	0,865	0,827	0,793	0,44	0,993	0,986	0,978	0,972	0,965
0,18	0,956	0,915	0,877	0,843	0,811	0,46	0,993	0,987	0,980	0,974	0,968
0,19	0,960	0,923	0,889	0,857	0,827	0,48	0,994	0,988	0,982	0,976	0,970
0,20	0,964	0,930	0,899	0,869	0,841	0,50	0,995	0,989	0,984	0,978	0,973
0,21	0,967	0,936	0,907	0,880	0,854	0,52	0,995	0,990	0,985	0,980	0,975
0,22	0,970	0,942	0,915	0,890	0,886	0,54	0,995	0,991	0,986	0,982	0,977
0,23	0,973	0,947	0,922	0,898	0,876	0,56	0,996	0,991	0,987	0,983	0,979
0,24	0,975	0,951	0,928	0,906	0,885	0,58	0,996	0,992	0,988	0,984	0,980
0,25	0,977	0,955	0,933	0,913	0,893	0,60	0,996	0,993	0,989	0,985	0,982
0,26	0,978	0,958	0,938	0,919	0,901	0,62	0,997	0,993	0,990	0,986	0,983
0,27	0,980	0,961	0,942	0,925	0,907	0,64	0,997	0,994	0,991	0,987	0,984
0,28	0,981	0,964	0,946	0,930	0,913	0,68	0,997	0,994	0,992	0,989	0,986
0,29	0,983	0,966	0,950	0,934	0,919	0,72	0,998	0,995	0,993	0,990	0,988
0,30	0,984	0,968	0,953	0,938	0,924	0,76	0,998	0,996	0,994	0,992	0,990
0,31	0,985	0,970	0,956	0,942	0,929	0,80	0,998	0,996	0,995	0,993	0,991
0,32	0,986	0,972	0,959	0,946	0,933	0,84	0,998	0,997	0,995	0,993	0,992
0,33	0,987	0,974	0,961	0,949	0,937	0,88	0,999	0,997	0,996	0,994	0,993
0,34	0,988	0,975	0,963	0,952	0,940	0,92	0,999	0,997	0,996	0,995	0,994
0,35	0,988	0,977	0,966	0,955	0,944	0,96	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994
0,36	0,989	0,978	0,967	0,957	0,947	1,00	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995

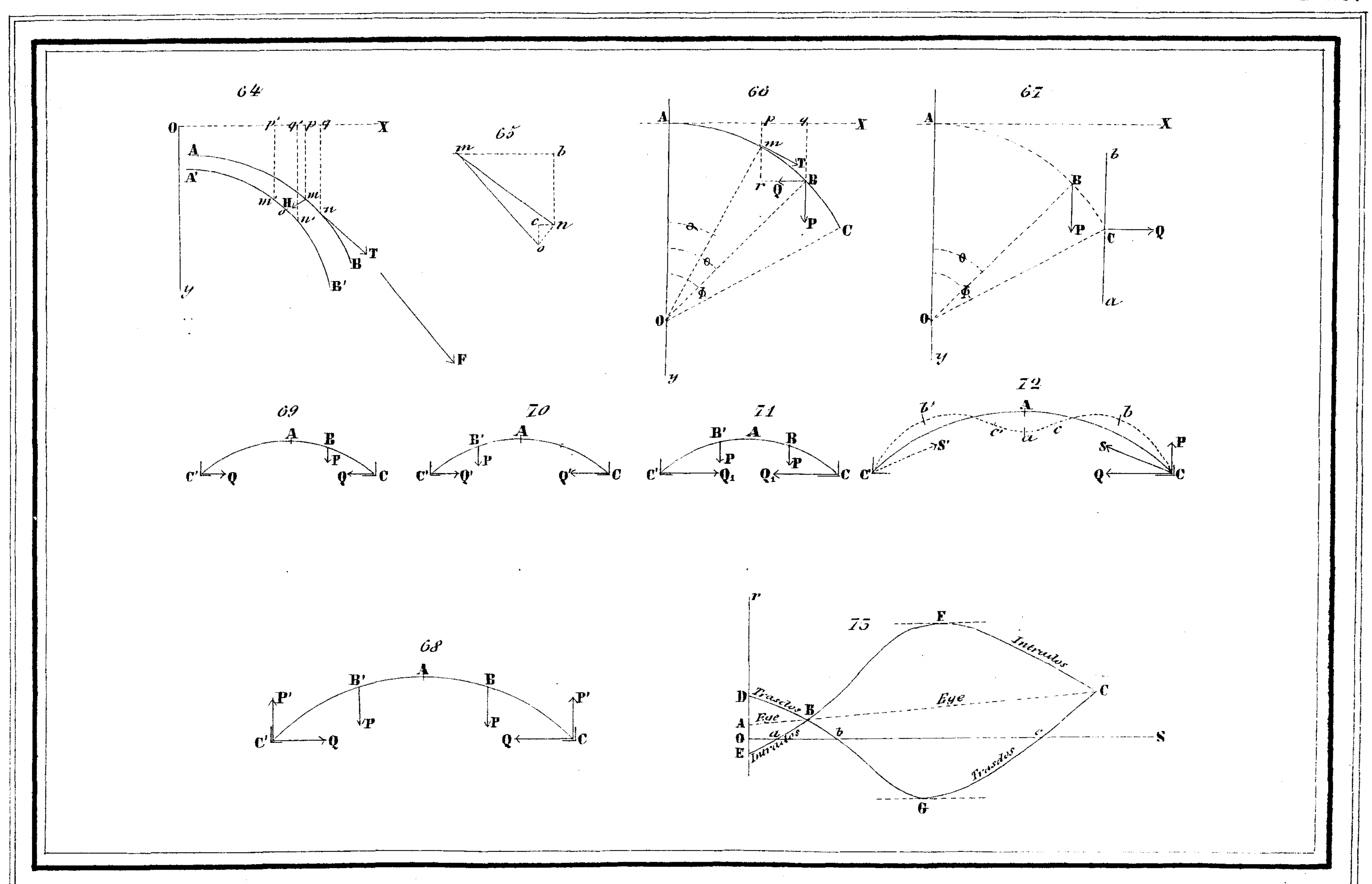

1.ª
2.ª
3.ª
4.ª
5.ª
6.ª


7ª
8ª
9ª
10ª
11ª
12ª
13ª
14ª
15ª
16ª
17ª
18ª
19ª
20ª
21ª

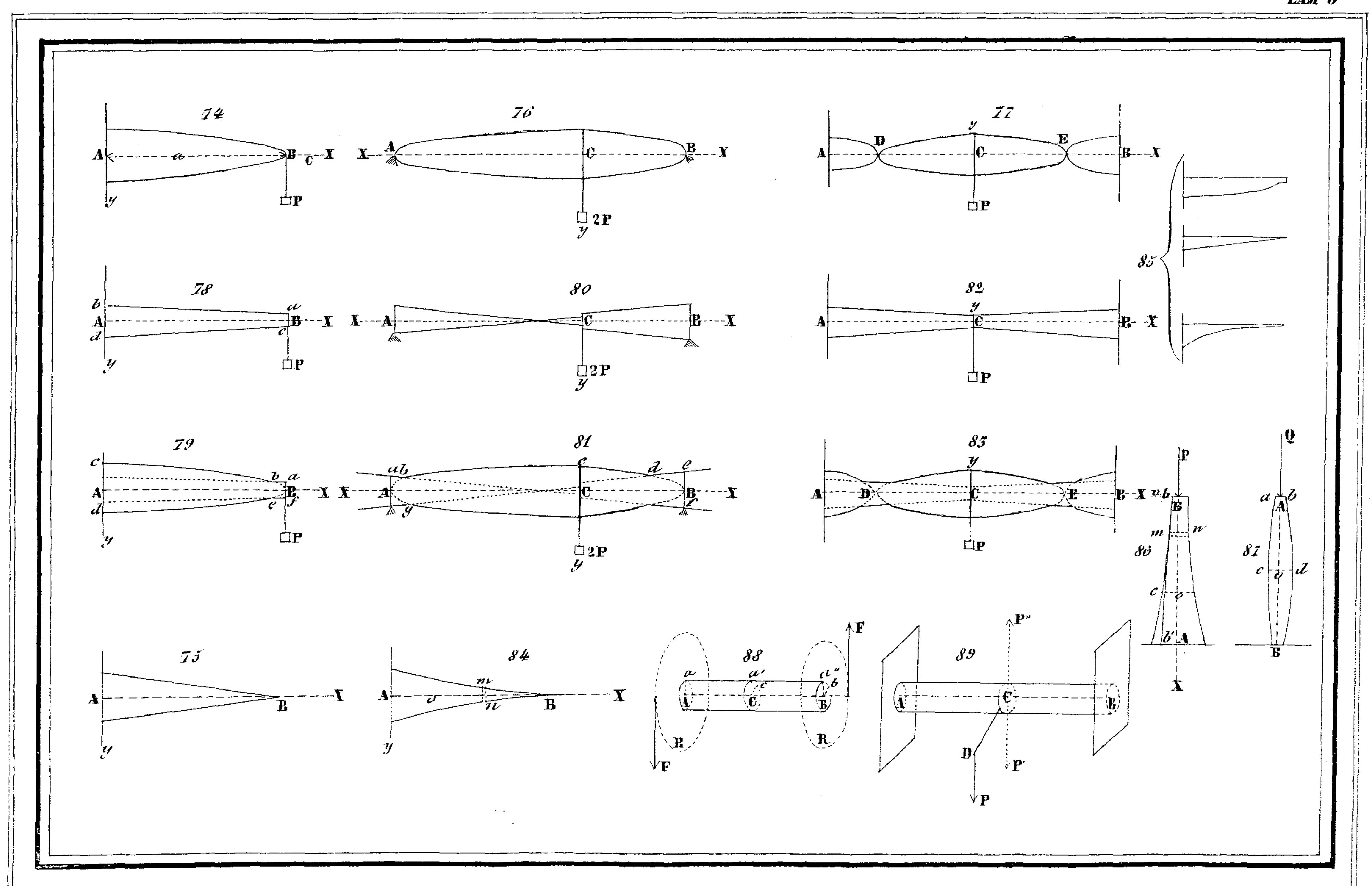

LAM 3ª
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
Lit J. Donon. Madrid.



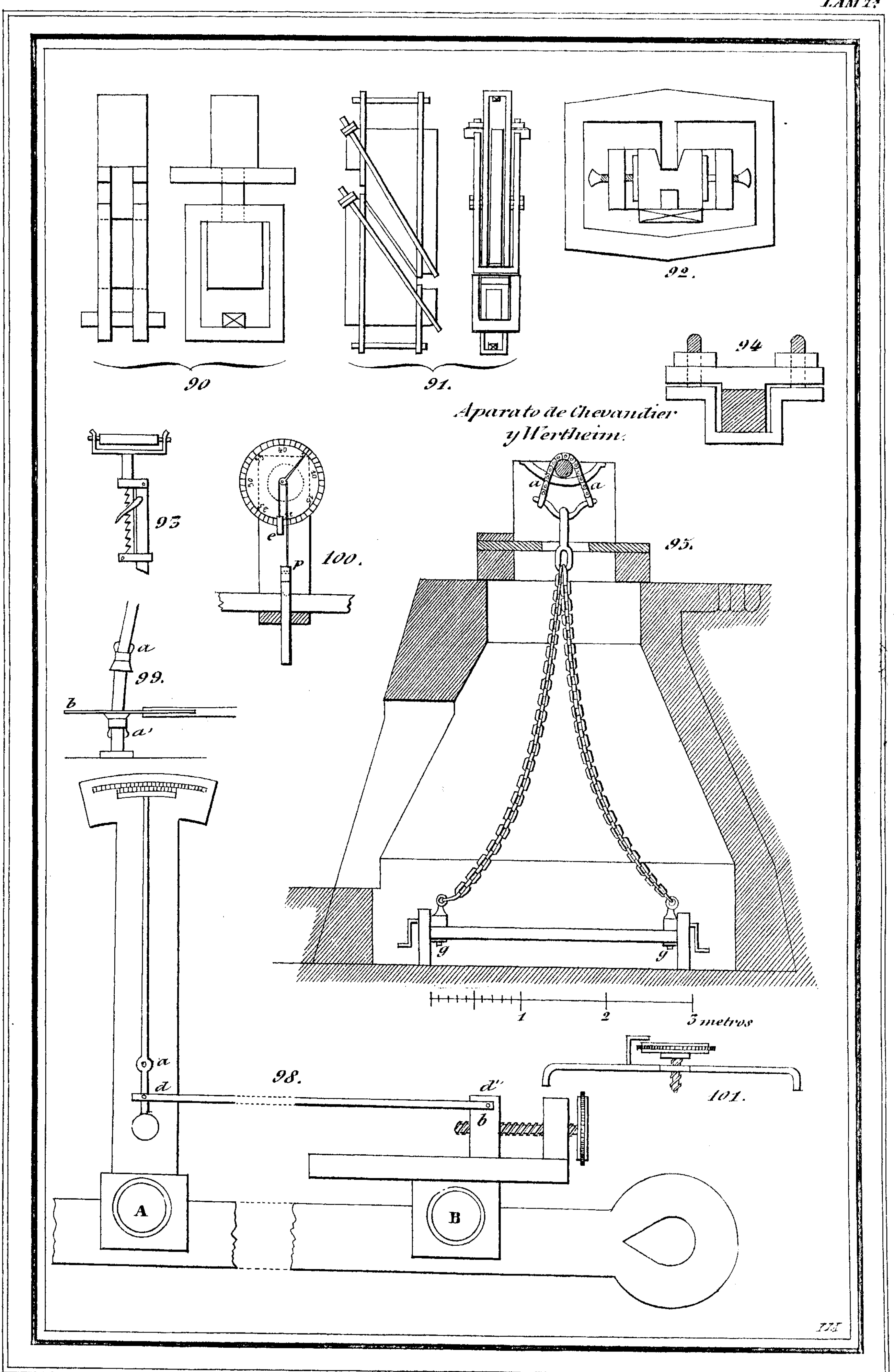
Lit J. Donon Madrid.



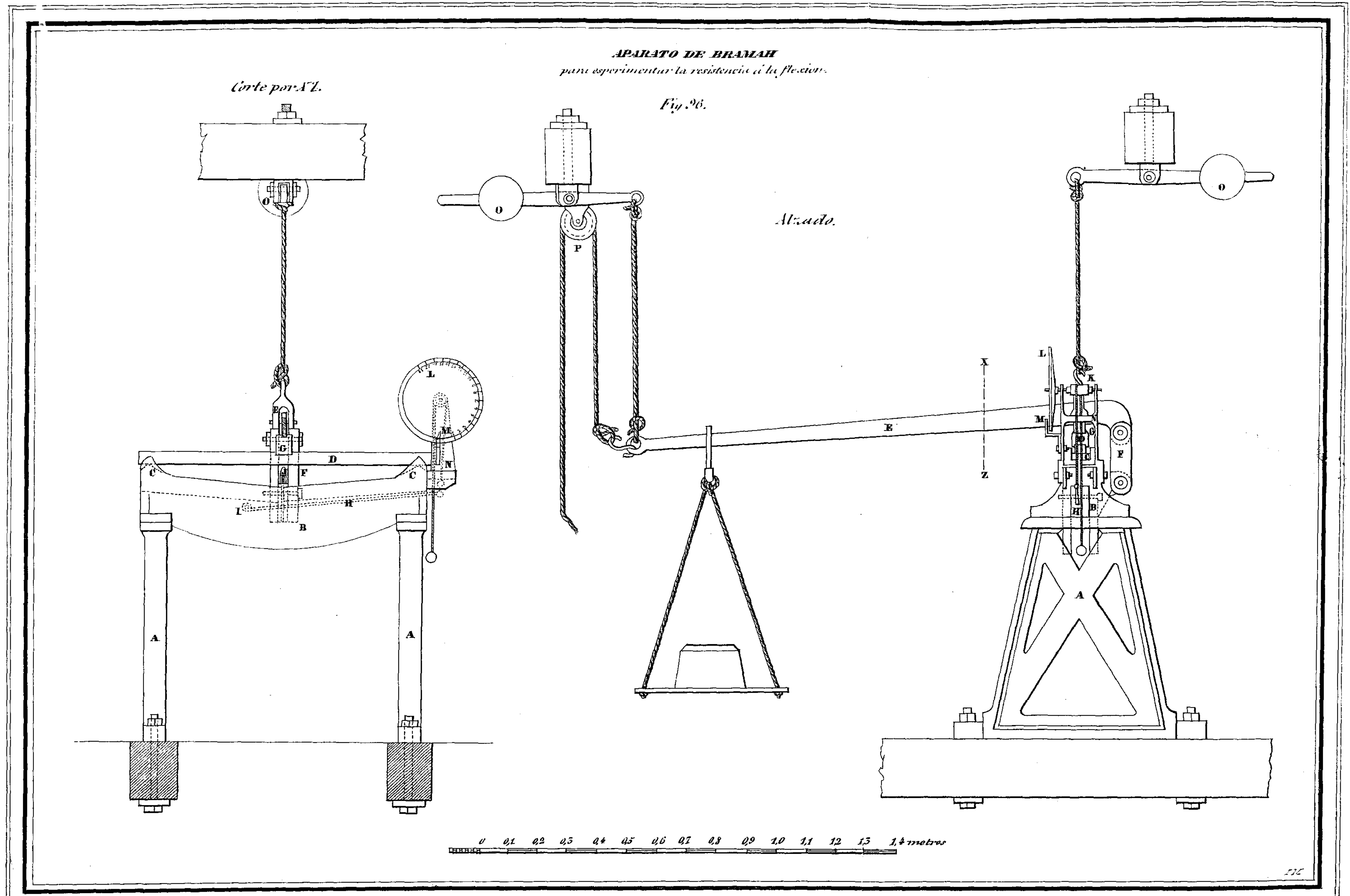
Lit. J. Donon, Madrid.



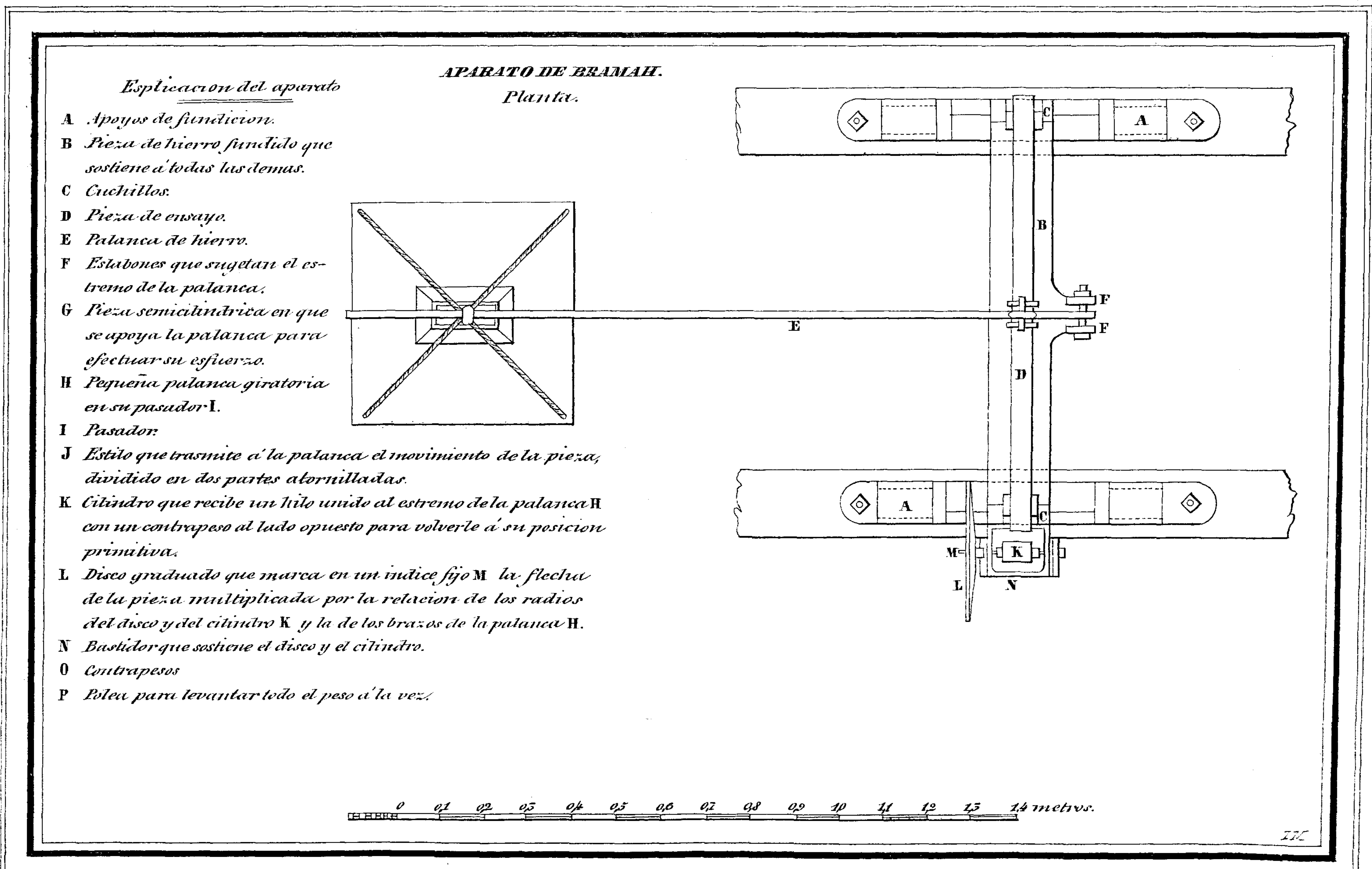
Lit. J. Donon, Madrid.



Lit. J. Donon. Madrid.



Lit. J. Donon. Madrid.



Lit. J. Donon. Madrid.

Fig. 97.

APARATO DE RONDELET.

A *Pieza de madera que sostiene el aparato.*

a *Abrazaderas que la unen al muro.*

B *Palanca.*

C *Prisma triangular de hierro fundido que sirve de cuchillo.*

D *Prismas de hierro.*

E *Sólido que se ensaya.*

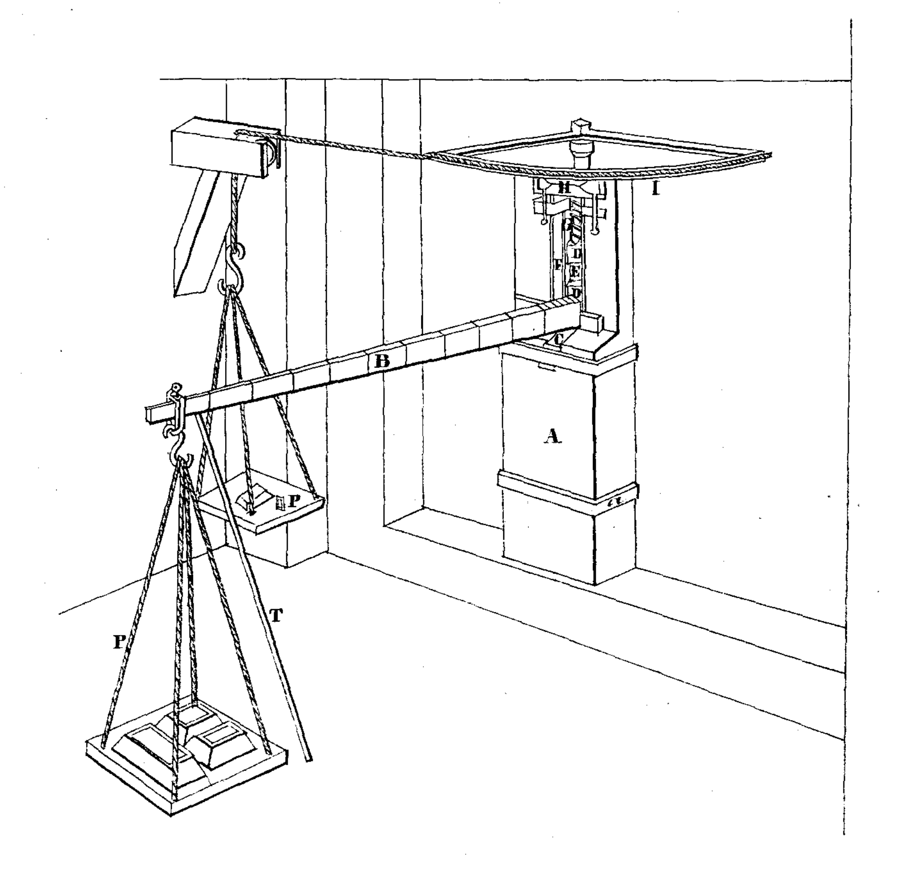
F *Reglas de hierro que sirven de guias.*

G *Tornillo.*

H *Tuerca.*

I *Arco de hierro que trasmite al tornillo la accion del peso* **P.**

T *Tornapunta para sostener la palanca.*



0 1 2 3 metros

Lit J. Donon. Madrid.